ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. (В.И. Богачев) Докажите, что для всяких трех непрерывных функций $f, g, h : [0,1] \to [0,1]$ выполнено неравенство

$$\int_0^1 (f(t) + g(t) + h(t))\,dt \leqslant 2 + \int_0^1 f(t)g(t)h(t)\,dt.$$

2. (Г.А. Агафонкин) Действительные числа a_k таковы, что

$$\sum a_k = 0, \quad \sum a_k^3 = 0, \quad \sum |a_k| = 1.$$

Докажите, что $|\sum \sin a_k| < 0,0006$.

3. (П.А. Бородин) Найдите все непрерывные функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, обладающие свойствами $\mu(f(A)) \leqslant \mu(A)$ при $\mu(A) \geqslant 1/2$, $\mu(f([0,1])) = 1$
(μ — мера Лебега).

4. (В.В. Рыжиков, А.В. Домрин) Функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ограничена и удовлетворяет тождеству

$$2f(x,y) = f(x+1,y) + f(x,y+1).$$

Докажите, что она периодична по обеим переменным с периодом 1.

5. (И.А. Шейпак) Последовательность комплексных чисел задана равенствами

$$z_{n+1} = z_n + n^2 z_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots); \quad z_0 = 1, z_1 = i.$$

а) Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n$. б) Найдите этот предел.