

**ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ**

*кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа*

1. (П.А. Бородин) Может ли последовательность попарно различных положительных чисел как множество совпадать с множеством своих последовательных частных, то есть

$$\{a_n : n = 1, 2, \dots\} = \{a_{n+1}/a_n : n = 1, 2, \dots\}?$$

2. (Д.В. Горяшин) Вычислите интеграл

$$\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{\pi - x} + x \operatorname{ctg} x \right) dx.$$

3. (В.В. Рыжиков, П.А. Бородин) На отрезке $[0, 2]$ задана комплекснозначная непрерывная функция f , все значения которой лежат в круге $\{w : |w| \leq 1\}$. Докажите, что если $|f(0)| < 1$, то найдется такое комплексное число a , что

$$\mu(\{x \in [0, 2] : |f(x) - a| < 1\}) > 1.$$

Здесь μ — мера Лебега на прямой.

4. (И.А. Шейпак) Последовательность определяется индуктивно: $x_1 = a > 1$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$. Найдите сумму $\sum_{n=1}^{\infty} 1/x_n$.
5. (Я.Кореваар) Докажите, что если $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, и $\sum_{k=1}^{\infty} ka_k < \infty$, то

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu n} = 0.$$