ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. (В.И.Богачев) Интегрируема ли на полуоси $[0, +\infty)$ функция

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt?$$

2. (П.А.Бородин) Существует ли ненулевая функция f, непрерывная на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющая неравенству

$$\int_x^1 f(t)\, dt \geqslant \int_0^x t f(t)\, dt$$

при каждом $x \in [0, 1]$?

3. (А.А. Флеров) Пусть многочлен $p(x)$ степени n имеет на отрезке $[0, 1]$ ровно n нулей, причем $p(0) = p(1) = 0$. Найдите множество всех возможных значений максимального нуля производной многочлена p (то есть максимального из таких чисел a, что $p'(a) = 0$).

4. (В.К.Белошапка) Существует ли функция $U(x, y)$, непрерывная на квадрате $[0, 1]\times[0, 1]$, универсальная в следующем смысле: для всякой функции $f \in C[0, 1]$, удовлетворяющей условию $\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| \leqslant 1$, найдется такое $y(f) \in [0, 1]$, что $f(x) \equiv U(x, y(f))$?

5. (С.В.Ковалевская, 1875, предложено А.В.Домриным) Пусть степенной ряд

$$u(x, t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} x^n t^m$$

сходится в некоторой окрестности начала координат на плоскости действительных переменных x, t и удовлетворяет там уравнению теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Покажите, что радиус сходимости ряда $u(x, t_0)$ по переменной x равен бесконечности при всех t_0, достаточно близких к нулю.