ОЛИМПИАДА ПО АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ I-II КУРСОВ

кафедра Теории функций и функционального анализа
кафедра Математического анализа

---

1. (В.И.Богачев) Задана последовательность многочленов $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Обязательно ли найдется такая непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция f и такая последовательность точек $t_n \in [0,1]$, что а) $|f(t_n) - p_n(t_n)| > 1/n$;
   б) $|f(t_n) - p_n(t_n)| > 1$?

2. (О.В.Камловский, О.Н.Косухин) Докажите, что для всяких $b > a > 0$ справедливы неравенства
$$2 \cdot \frac{b-a}{b+a} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{2}\left(1 + \frac{1}{ab}\right).$$

3. (В.В.Галатенко). Функция f непрерывна на отрезке $[0,1]$ и во всех точках этого отрезка, кроме счетного числа точек, имеет равную 0 производную. Верно ли, что f — константа?

4. (В.В.Рыжиков) Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — множество положительной меры Лебега, обладающее следующим свойством: если $x, y \in A$, то и $x^2 - y^2 \in A$. Известно, что множество A содержит число 2. Верно ли, что оно содержит также и число 2012 ?

5. (П.А.Бородин) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходящийся числовой ряд с положительными членами, сумма которого равна 1. Для заданного подмножества Λ натуральных чисел положим $s(\Lambda) = \sum_{n\in\Lambda} a_n$ ($s(\emptyset) := 0$), и пусть
$$S := \{s(\Lambda) : \Lambda \subset \mathbb{N}\}.$$
   а) Приведите примеры рядов с указанными свойствами, для одного из которых $S = [0,1]$, а для другого $S \neq [0,1]$.
   б) Найдите условие на последовательность $\{a_n\}$, необходимое и достаточное для равенства $S = [0,1]$.

6. (О.Н.Косухин) Докажите, что нули производной $P'(z)$ кубического многочлена $P(z) = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)$ комплексного переменного лежат внутри или на границе шестиугольника, получаемого из треугольника $a_1a_2a_3$ отсечением (прямыми, параллельными сторонам) трех подобных ему треугольников с коэффициентом подобия $1/3$.