Задача № 1267 из задачника Демидовича

И.Х. Сабитов

Переформулируем задачу: пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[0, t]$, имеет производные 2-го порядка с выполнением условий

$$f(0) = 0,\ f(t) = s,\ f'(0) = f'(t) = 0. \tag{1}$$

Доказать, что существует точка $c \in (0, t)$, в которой $|f"(c)| \geq \frac{4s}{t^2}$.

Напомним физическое содержание задачи: значение функции $f(x)$ - это длина пути, который проехал автомобиль к моменту времени $\tau = x$, и $f''(x)$ - это ускорение автомобиля в тот же момент времени $\tau = x$.

Предположим противное: ускорение в любой момент времени $|f"(x)| < \frac{4s}{t^2}$.

Рисуем график функции $f(x)$. Пусть точка $O(0,0)$ - начало, а точка $M(t, s)$ - конец движения автомобиля. Замечаем, что в силу (1) график в точках $x = 0$ и $x = t$ касается соответственно оси Ox и горизонтальной прямой $y = s$, и поэтому в окрестности точки $O(0,0)$ он расположен ниже хорды OM с уравнением $y = \frac{s}{t}x$, а около точки M он выше хорды OM. Значит, он пересекает хорду OM. Пусть $x = \xi_1$ -первая точка пересечения графика с этой хордой, а $x = \xi_2 \geq \xi_1$ - последняя точка пересечения.

К моменту $\tau = \xi_1$ автомобиль проехал расстояние $f(\xi_1) = \frac{s}{t}\xi_1$. Если бы автомобиль ехал с постоянным ускорением $a = \frac{4s}{t^2}$, он бы проехал к этому моменту расстояние $a\frac{\xi_1^2}{2} = \frac{2s}{t^2}\xi_1^2$. Но наш автомобиль ехал с меньшим ускорением, поэтому, $\frac{s}{t}\xi_1 < \frac{2s\xi_1^2}{t^2}$, откуда получаем, что $\xi_1 > t/2$.

Теперь рассмотрим движение автомобиля на промежутке времени от ξ_2 до t. За это время он проехал расстояние, равное $s - f(\xi_2) = s - \frac{s}{t}\xi_2$. Это меньше расстояния $a\frac{(t-\xi_2)^2}{2} = \frac{2s(t-\xi_2)^2}{t^2}$ при движении с постоянным ускорением a. Из неравенства

$$s - \frac{s}{t}\xi_2 < \frac{2s}{t^2}(t-\xi_2)^2$$

получаем $\xi_2 < t/2$, что противоречит полученному выше неравенству $\xi_1 > t/2$. Значит, наше предположение $|f"(x)| < \frac{4s}{t^2}$ неверно.