

УПРУГОСТЬ И НЕУПРУГОСТЬ. ДОСТИЖЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Доклад заведующего кафедрой теории упругости профессора И.А.Кийко

Научные исследования на кафедре теории упругости проводятся в рамках методологии, сформулированной членом-корреспондентом АН СССР А.А.Ильюшиным в середине прошлого века: механика деформируемого твердого тела (МДТТ) — это наука о термомеханических процессах, происходящих в твердых телах, элементах конструкций, природных образованиях при взаимодействии их между собой и с физическими полями различной природы: температурой, тяготением, проникающими излучениями и др. Тем самым определен предмет исследований.

Метод исследования — разработка математической модели явления и изучение ее современными методами. Существенная роль отводится теории и практике эксперимента.

В рамках этой методологии проводятся исследования по следующим разделам

1. Теория определяющих соотношений
2. Классическая и неклассическая упругость. Аэроупругость
3. Вязкоупругость, вязкопластичность
4. Пластичность при сложных нагружениях
5. Динамика и прочность материалов и элементов конструкций



Результаты по разделу 1 Теория определяющих соотношений

В направлении развития основ общей теории определяющих соотношений (сопротивления тел деформированию) в классической механике сплошной среды проведен анализ инвариантностей объективных кинематических и динамических тензоров, и их соотношений. Представлена общая форма системы определяющих соотношений и ее аналогов для обобщенных тензорных мер напряжений и конечных деформаций с учетом внутренних массовых сил и внутренних кинематических связей.

Показано, что наличие связей может сопровождаться возникновением в теле произвольных полей контактных сил (напряжений) и внутренних (самоуравновешенных в теле) массовых сил без нарушения кинематических характеристик движения тела.

Проведен общий анализ произвола полей внутренних массовых и контактных сил при наличии внутренних кинематических связей, проиллюстрированный на примере свойства несжимаемости. Представляет интерес исследование такого произвола для других видов внутренних кинематических связей.

Литература

1. *Бровко Г.Л.* Вопросы инвариантности в классических и неклассических моделях сплошных сред. В кн.: Упругость и неупругость. М.: URSS, 2006. С. 110-123.
2. *Бровко Г.Л.* Эффективные свойства инвариантности процессов и соотношений в механике сплошных сред. В кн.: Современные проблемы математики и механики. Т. II. Механика. Вып. 1. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. С. 108-126.
3. *Бровко Г.Л.* Развитие общих принципов теории определяющих соотношений сплошных сред. Известия Тульского гос. ун-та. Естеств. науки. 2013. Вып.2. Ч.2. С.43-58.
4. *Brovko G.L.* On general principles of the theory of constitutive relations in classical continuum mechanics. Journ. Eng. Mathematics. Kluwer Academic Publishers. Printed in Netherlands. (2013) 78:37–53 DOI 10.1007/s10665-011-9508-y

Предложены и реализованы **подходы к построению классических и неклассических моделей сплошных сред** со специальными свойствами и специальной (неоднородной) структурой, сочетающие аксиоматику и конструктивное моделирование. На основе дискретной модели оснащенного стержня построена одномерная модель континуума Коссера, изучены ее свойства, собственные и вынужденные колебания и их устойчивость. С использованием гипотезы взаимопроникающих сред, принципа материальной независимости от системы отсчета и теории размерностей построены модели многофазных и двухфазных наполненных пористых сред при произвольных режимах течения жидкостей (газов) и произвольных (в том числе конечных) деформациях каркаса. Дано обобщение моделей сред с памятью формы на область конечных деформаций. Дано описание механических свойств новых форм углерода, на основе континуального подхода исследован колебательный спектр углеродной нанотрубки. Сформулированы подходы к построению рациональной механики классических и неклассических сред.

Перспективным представляется применение дискретных подходов к построению новых моделей сред неклассического типа, развитие и приложение моделей пористых сред, приложение моделей тел с памятью формы при конечных деформациях, развитие континуальных подходов к исследованию механических свойств микро- и наноструктур.

Литература

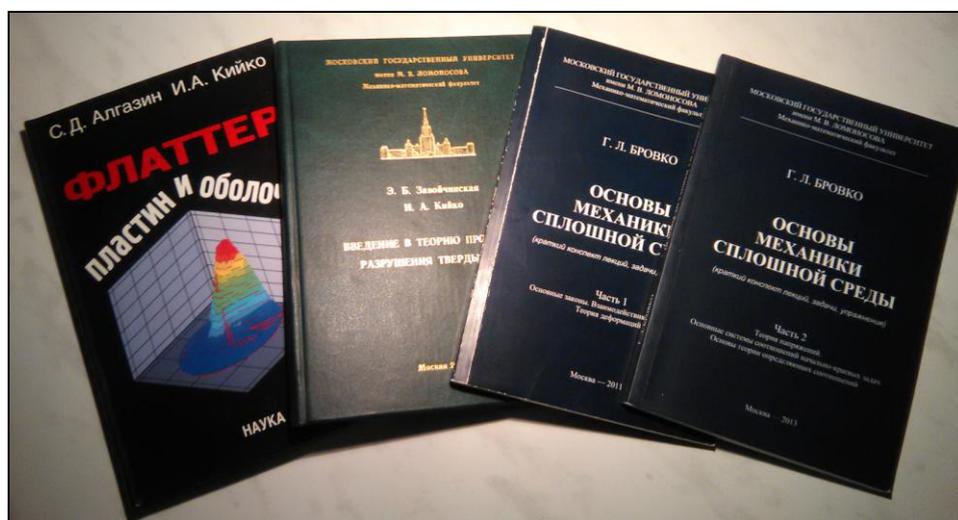
1. *Brovko G.L., A.G. Grishayev, O.A. Ivanova.* Continuum models of discrete heterogeneous structures and saturated porous media: constitutive relations and invariance of internal interactions. Journal of Physics: Conference Series. The Seventh International Seminar on Geometry, Continua and Microstructures. V. 62. 2007. Pp. 1–22.
2. *Бровко Г.Л., Иванова О.А.* Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера. Изв. РАН. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 22-36.
3. *Brovko G.L., O.A.Ivanova, A.S.Finoshkina.* On geometrical and analytical aspects in formulations of problems of classic and non-classic continuum mechanics. Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland. 2009. Vol. 191. Pp. 51-79.

4. Бровко Г.Л. Модели и задачи для наполненных пористых сред. Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2010. № 6. С. 33-44.
5. Бровко Г.Л. Математические основы механики сплошных сред: классические и неклассические теории. В кн.: Упругость и неупругость. / Под ред. проф. И.А.Кийко, проф. Г.Л.Бровко, проф. Р.А.Васина. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2012. С. 20- 43.

Научные исследования кафедры находят отражение в **учебных пособиях** для студентов и аспирантов.

Учебные пособия

1. Бровко Г.Л. Задачи и упражнения по курсу механики сплошной среды. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2008. 64 с.
2. Бровко Г.Л. Основы механики сплошной среды (краткий конспект лекций, задачи, упражнения). Ч. 1. Ч.2. М.: Изд-во «Попечительский совет механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова», 2011.



В рамках модели случайно-неоднородной упругой среды дана постановка задачи об определении представительного объема как задачи о выбросах случайной функции. Проведенные для ряда конкретных структур расчеты позволяют вычислить этот объем через макроскопические значения упругих модулей структурных элементов и их дисперсию. Линейный параметр, характеризующий представительный объем, является тем структурным параметром, который определяет границы применимости макроскопических уравнений состояний. Он может быть использован, например, для уточнения модели материала в окрестности концентратора напряжений или в динамической задаче.

В задаче об определении спектра собственных колебаний углеродной нанотрубки обоснована возможность применения континуальных моделей и предложен метод определения упругих модулей по результатам известных экспериментов. Проведены конкретные расчеты.

Литература

1. Тунгусова З.Г. Границы применимости макроскопических уравнений состояния для упругих структурно-неоднородных сред. Упругость и неупругость. М.2001.

2. *Тунгускова З.Г.* Корреляция процесса макродеформаций и дисперсии упругих свойств структурно-неоднородных материалов. Упругость и неупругость. М. 2006.
3. *Тунгускова З.Г.* Масштабный эффект упругих свойств дисперсно-упрочненных композитов. Упругость и неупругость. М. 2011.
4. *Бровко Г.Л., Тунгускова З.Г.* Использование континуальных моделей для расчета колебательного спектра в углеродной нанотрубке. Вестник Московского ун-та сер 1 мат. мех №4 2009.

Результаты данного раздела получены сотрудниками кафедры профессором Г.Л. Бровко и доцентом З.Г.Тунгусковой.

Результаты по разделу 2 **Классическая и неклассическая упругость. Аэроупругость**

Панельный флаттер пластин и оболочек. Разработаны точные (на основе линеаризованной теории потенциального обтекания ЛПТ) и приближенные (в рамках поршневой теории ПТ) постановки задач о колебаниях и устойчивости (панельный флаттер) пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Материал оболочек и пластин предполагается изотропным или ортотропным, упругим или линейно вязкоупругим. Математическая модель явления колебаний пластины или оболочки на основе размерного базиса приводится к безразмерному виду, в результате образуется система безразмерных параметров κ_s , $s=1\dots N$, полностью характеризующая математическую модель.

Рассматриваются два процесса: натурный (н) и модельный (м); если для $\forall s$ будет $\kappa_s^m = \kappa_s^n$, то в соответствующих точках модели и природы и в соответствующие моменты времени все безразмерные параметры процессов совпадут. Равенства $\kappa_s^m = \kappa_s^n$ дают возможность, с одной стороны, пересчитать измеренные параметры модели на натуру, а с другой — разработать теорию эксперимента.

Отметим характерную особенность разработанной методики: она даёт возможность вводить различные масштабы моделирования по линейным размерам пластины или оболочки и по толщине, что открывает более широкие возможности для постановки эксперимента.

В задачах флаттера вязкоупругих пластин выявлен характерный параметр — отношение приведенного времени релаксации материала пластины к характерному времени, доставляемому краевой задачей. На примере одного точного и некоторых приближенных решений показано, что в зависимости от величины этого параметра критическая скорость флаттера может меняться от мгновенномодульной до предельномодульной. Развитие метода предполагается использовать при исследовании флаттера пологих оболочек вращения при внешнем обтекании.

Пример флаттера при полете планера:

<http://rutube.ru/video/e600500704a2ec163a4b059fdb31de6/>

Литература

1. *Кийко И.А., Показеев В.В.* Колебания и устойчивость вязкоупругой консольно закреплённой полосы.// Сб. «Упругость и неупругость», Изд. МГУ 2011г.
2. *Kiiko I.A., Pokaseyev V.V.* Flutter of a viscoelastic strip// Journal of Eng/ Mathem. Berlin, Haidelberg, Springer/ ISSN, 0022-0833,2012.

Изгиб и колебания пластин. Предложен вариант линейной теории тонких пластин, основанный на предположении о том, что интегральные уравнения динамического равновесия могут быть записаны для произвольного объема в недеформированном состоянии. Точным следствием этих уравнений, после введения понятий кинематически эквивалентных перемещений, являются разделённые начально-краевые задачи растяжения-сжатия и изгиба. Основное внимание уделено задаче изгиба. Доказана теорема о единственности решения; приведены примеры тестовых задач об изгибе, собственных колебаниях и панельном флаттере, обнаружена существенная зависимость решений от коэффициента Пуассона.

Литература

1. *Кийко И.А.* Изгиб и колебания пластин// Изв. МГТУ «МАМИ». Сер. Естественные науки, №3 (21),2014. С. 42-76.

В линейной теории упругости получено новое представление общего решения через гармонические функции. В отличие от известных представлений все гармонические функции скалярны, их число минимально. На этой основе даны формулировки класса краевых задач и метод решения сведением к классическим задачам теории потенциала.

Литература

1. *Леонова Э.А.* Скалярная постановка задач статики теории упругости//Изв. РАН МГТ. №1, 2005.
2. *Леонова Э.А.* Представление общего решения теории упругости через скалярные потенциалы//Упругость и неупругость.М: Изд-во МГУ. 2011.
3. *Леонова Э.А.* Сопряженные краевые задачи теории упругости в скалярных потенциалах//Упругость и неупругость. М: Изд-во МГУ. 2012.

Результаты данного раздела получены сотрудниками кафедры профессорами И.А.Кийко и Э.А.Леоновой

Результаты по разделу 3. Вязкоупругость, вязкопластичность

Растекание тонкого пластического слоя между параллельными плоскостями. Исследуется задача о форме контура, ограничивающего тонкий слой из идеально пластического материала, слой сжимается параллельными плоскостями, которые сближаются вдоль общей нормали (задача о растекании). Материал слоя предполагается пластически анизотропным (условие пластичности Мизеса-Хилла); контактное трение также предполагается анизотропным, для его описания предложена математическая модель, согласующаяся с механическим смыслом явления. Условие совместности известной системы уравнений течения в тонком слое приведено к нелинейному дифференциальному уравнению Лагранжа относительно линий тока, его общее решение введением интегрирующего множителя записано в квадратурах; это решение зависит от двух произвольных функций. Для конкретного вида этих функций найдено явное выражение линий тока и для класса областей выписано нелинейное эволюционное

уравнение для определения контура области по его начальной форме. Предложена общего вида замена переменных и искомой функции, которая приводит исходное эволюционное уравнение к системе трёх обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Общее решение двух из этих уравнений построено, а третье приводится к уравнению Абеля второго рода либо к уравнению Риккати. Найдены классы новых решений этих уравнений. Исследована задача об устойчивости процесса растекания полосы, один край которой заделан, а другой свободен. Предполагается получить новые классы решений при других предположениях относительно произвольных функций в уравнении Лагранжа.

Литература

1. *Кийко И.А.* О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями// ПММ, т.75, вып.1, 2011, с.15-26.
2. *Кийко И.А.* Течение между параллельными плоскостями пластически анизотропного слоя в области, имеющей сток.// Вестн. Моск. ун-та Сер. I, мат., мех., 2013 №3.

Разработана новая **нелинейная эндохронная теория стареющих и поврежденных вязкоупругих материалов**. Эта теория дает возможность оценивать накопление повреждений и прочность при длительной эксплуатации конструкций из высоконаполненных полимерных материалов. Создан **численно-графический метод** идентификации механических характеристик нелинейной эндохронной теории стареющих и поврежденных вязкоупругих материалов, позволивший без проведения трудоемких вычислений получить оценку прочности поврежденных конструкций, подвергавшихся в течение длительной эксплуатации сотням тысяч циклов нагружений. В основе метода лежит сравнение результатов контрольных испытаний неповрежденных образцов и образцов, получивших повреждения в ходе специальным образом подобранных лабораторных форсированных нагружений. Контрольные испытания соответствуют определенному этапу эксплуатации реальной конструкции.

Разработан метод определения когезионной и адгезионной макропрочности конструкций на основе результатов теоретических и экспериментальных исследований.

За цикл работ **«Руководство для конструкторов. Прочность наполненных полимерных материалов, используемых в изделиях РКТ»** профессору Д.Л.Быкову решением экспертной комиссии от 24 ноября 2012 года выдан Диплом и присуждена премия имени академика Б.П.Жукова за выдающиеся работы в области химии, технологии и применения энергетических конденсированных систем. Диплом подписан Вице-президентом РАН, и.о. академика-секретаря отделения химии и наук о материалах РАН, академиком С.М.Алдошиным и Генеральным директором и генеральным конструктором ФГУП «ФЦДТ «СОЮЗ»» членом-корреспондентом РАН Ю.М.Милехиным.

Литература

1. *Быков Д.Л., Мартынова Е.Д.* Структурно-энергетический анализ моделей нелинейно вязкоупругих материалов с несколькими функциями старения и вязкости//Известия РАН. Механика твердого тела. 2011, № № 1, с. 65-76.
2. *Быков Д.Л., Мартынова Е.Д.* Численно-графический метод определения характеристик поврежденных вязкоупругих материалов//Известия РАН. Механика твердого тела. 2013, № № 4, с. 64-71.

3. *Быков Д.Л., Мартынова Е.Д., Мельников. В.П.* Численно-графический метод описания ползучести поврежденных высоконаполненных полимерных материалов//Известия РАН. Механика твердого тела. 2015, № № 4 (принято к печати)

Результаты данного раздела получены сотрудниками кафедры профессорами И.А.Кийко, Д.Л.Быковым и доцентом Е.Д.Мартыновой.

Результаты по разделу 4. **Пластичность при сложных нагружениях**

Предложено обобщение теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина на случай конечных деформаций, использующее построение в полярном репере на основе двух разных мер деформаций (голономной и неголономной) скалярного и векторного образов процесса нагружения, для которых сформулированы соответствующие им постулаты изотропии.

Литература

1. *Муравлев А.В.* Обобщение теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина на случай конечных деформаций//Механика деформируемого твердого тела. Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1642-1644.

Появление теории упругопластических процессов (ТУП), как известно, принципиально изменило положение дел в экспериментальной пластичности – в настоящее время программы экспериментов в большинстве случаев учитывают классификацию траекторий деформаций, предложенную в ТУП [1]. Прямое использование ТУП позволило существенно развить и теорию эксперимента. Сформулирована теория эксперимента на сложное нагружение сплошных или толстостенных трубчатых образцов из упругопластического материала (двузвенные траектории деформаций; произвольные плоские траектории деформаций в методе условной трубки). В последнее десятилетие заметные результаты получены в теории эксперимента с учётом конечных деформаций для материала, свойства которого зависят от скорости деформации и температуры.

Разработаны экспериментально-теоретические методики построения диаграмм деформирования термовязкопластических материалов при конечных деформациях по результатам экспериментов на цилиндрических образцах с неоднородным напряжённо-деформированным состоянием [2].

Разработана экспериментально-теоретическая методика построения тригонометрической аппроксимации упругого потенциала в обобщенном пространстве деформаций А.А.Ильюшина при конечных деформациях[3].

Литература

1. *Васин Р.А.* Теория упругопластических процессов и экспериментальная пластичность//Упругость и неупругость. Материалы Междунар. научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 года. Изд-во Московского ун-та. М., 2011 г., с.44-51..

2. Муравлёв А.В., Иксарь А.В. Построение диаграмм деформирования термовязкопластических материалов с использованием натурального сдвига//Известия Тульского государственного университета, серия актуальные задачи механики, Тула, выпуск 2, С. 247-256, Изд-во ТГУ, 2006г.
3. Муравлев А.В. О представлении упругого потенциала в обобщенном пространстве деформаций А.А. Ильюшина//Изв. РАН, Механика твердого тел, 2011 г., №1, с. 99-102.

В рамках идеологии ТУПП предложена формулировка варианта теории поврежденной среды в тензорной форме.

Литература

1. Васин Р.А., Моссаковский П.А. Вариант соотношений для тензора поврежденности упругопластической среды//ПММ, 2011 г., Том 75. Вып. 1, с. 8-14.

Использование идеологии ТУПП позволило сформулировать новую концепцию построения банка данных о структурно-механических свойствах материалов [1]. (принципиальная схема концепции БД представлена на рис.1).

КОНЦЕПЦИЯ БАНКА ДАННЫХ

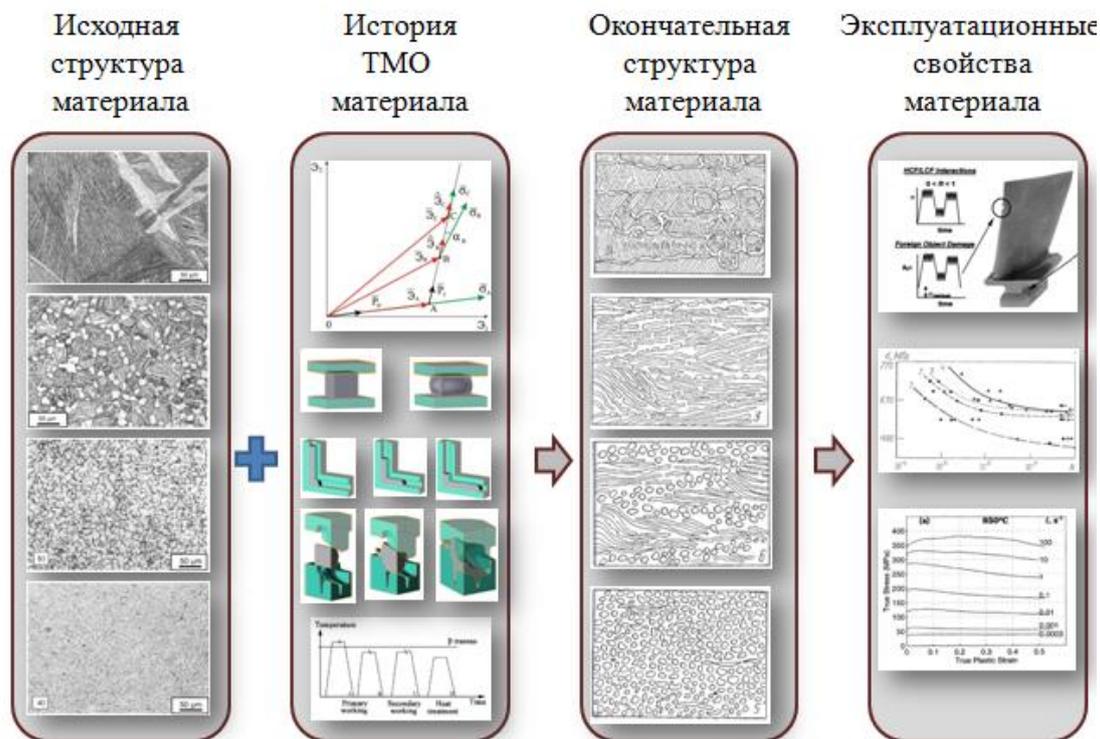


Рис.1

Суть концепции состоит в том, что в ней одновременно используются две классификации: процессов термомеханической обработки ТМО материала – по идеологии ТУПП; структуры материала (исходной и окончательной, после ТМО – по материаловедческим признакам. Это позволяет, в частности, всегда указать конечный набор сочетаний «исходная структура – процесс ТМО», обеспечивающий получение материала с окончательной структурой требуемого вида. И тогда проблема получения

изделия с заданным видом структуры материала в результате того или иного технологического процесса может быть сформулирована как некоторая специальная краевая задача механики деформируемого твердого тела

Литература

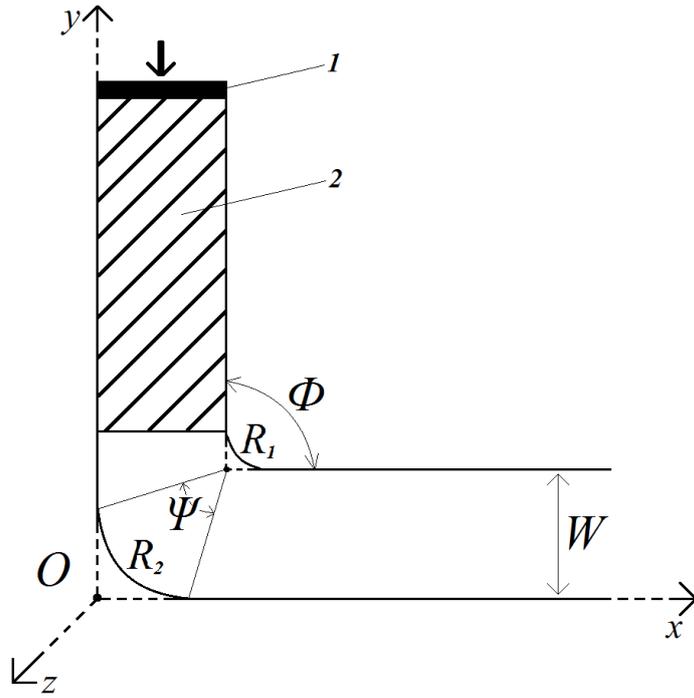
1. *Васин Р.А.* Теория упругопластических процессов и исследование структурно-механических свойств материалов//Изв. РАН, Механика твердого тела, 2011 г., №1, с. 19-26.

Дано обобщение предложенного А.А.Ильюшиным экспериментально-вычислительного метода СН-ЭВМ решения задач теории пластичности – он сформулирован как общая идеология решения существенно нелинейных краевых задач механики деформируемого твёрдого тела при неточно заданных (или неизвестных) определяющих соотношениях материала и развит до практической реализации применительно к решению задач динамической прочности.

Литература

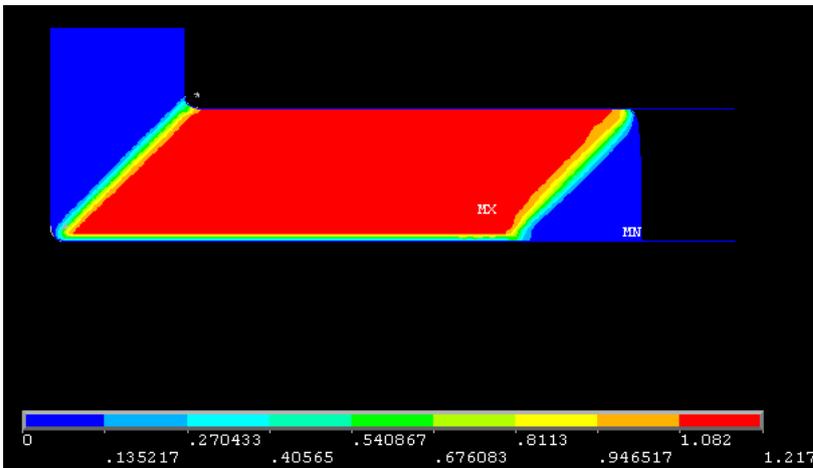
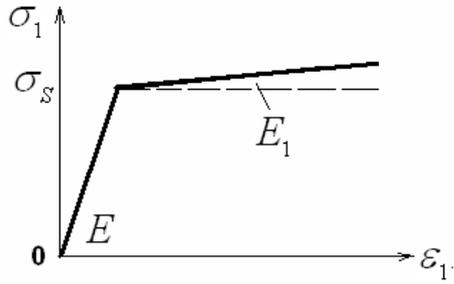
1. *Васин Р.А., Моссаковский П.А.* Теория упругопластических процессов, идеология и алгоритм решения существенно нелинейных краевых задач//Труды Междун. конф. RELMAS' 2008, 17-20 июня 2008 г. Т.2. С.-Петербург. Изд-во Политехн. ун-та, 2008, с. 48-50.
2. *Моссаковский П.А., Васин Р.А., Антонов Ф.К.* Развитие метода СН-ЭВМ Ильюшина применительно к краевым задачам динамической прочности//Упругость и неупругость. Материалы Междунар. научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящ. 100-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 20-21 января 2011 года. Изд-во Московского ун-та. М., 2011 г., с.210-215.

В задаче о равноканальном угловом прессовании заготовки из упругопластического материала исследовано влияние упрочнения материала на неоднородность деформации в получаемом изделии (рис.2, 3)

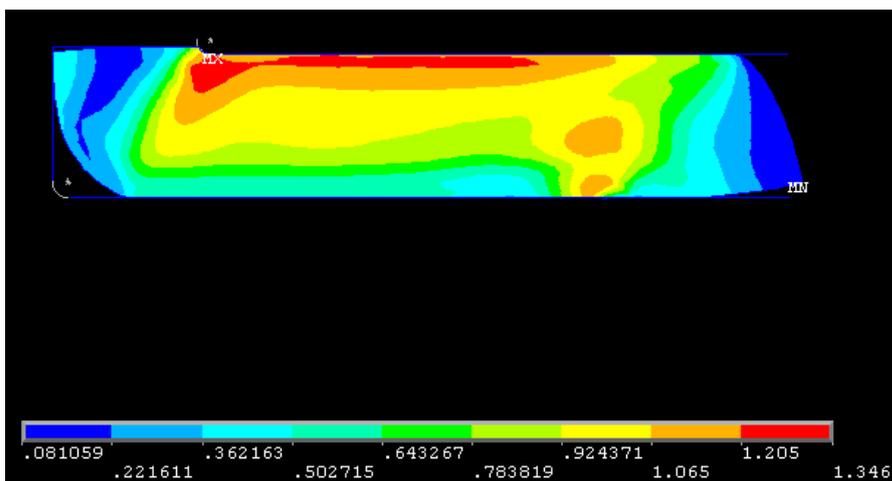


1- пуансон, 2- заготовка

Рис.2. Равноканальное угловое прессование заготовки



$$E_1 / E = 10^{-4}$$



$$E_1 / E = 10^{-2}$$

Рис.3.

Расчеты выполнены ст.н.с., к.ф.-м.н. Н.В.Овчинниковой.

Предложена постановка начально-краевой задачи сверхпластичности. На основе анализа публикаций, посвящённых механическим аспектам сверхпластического деформирования сплавов, выделены две актуальные проблемы – необходимость формулировки условия сверхпластичности, по смыслу аналогичного условию текучести в теории течения, и исследование поведения сплавов в состояниях, близких к сверхпластическому.

Сформулирован подход к экспериментальному построению условия сверхпластичности. Предложена методика качественной оценки границ области сверхпластичности по характеру запаздывания скалярных свойств при скачкообразном изменении скорости деформирования в экспериментах на одноосное растяжение. В экспериментах на титановых сплавах с неподготовленной структурой выявлены особенности их поведения при деформировании в режиме сверхпластичности.

Сформулирован вариант определяющих соотношений истокообразного вида с использованием внутреннего времени для описания поведения сплавов в режиме сверхпластичности. Предложен и апробирован вариант определяющих соотношений механики сверхпластичности, содержащий внутреннюю переменную, характеризующую эволюцию микроструктуры.

В численном эксперименте по равноканальному угловому прессованию продемонстрирована неустойчивость процесса деформирования у материала с падающей диаграммой (см. иллюстрации; расчеты выполнены к.ф.-м.н. О.И.Быля с использованием программного продукта QForm7).

Литература

1. Васин Р.А., Куйко И.А. О постановке начально-краевой задачи сверхпластичности// Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2004, № 1
2. Bylya O.I., Vasin R.A. and Sarangi M.K. On the behavior of Ti alloys during deforming in near superplastic regimes//Proc. IWMNM-2008, ed. by S.N. Bose, S.N. Behera and V.K. Roul. AIP Conference Proc., v.1063, Melville, New-York, 2008, p.p.349-360.
3. С.С.Бхаттачария, О.И.Быля, Р.А.Васин, К.А.Падманабхан. Механическое поведение титанового сплава Ti-6Al-4V с неподготовленной микроструктурой при скачкообразном изменении скорости деформирования в режиме сверхпластичности // Изв. РАН. МТТ. 2009г., № 6, с.168-177.

4. *Olga Bylya, Rudolf Vasin, Peter Chistyakov, Anatoly Muravlev.* Experimental Study of the Mechanical Behavior of Materials under Transient Regimes of Superplastic Deforming // Materials Science Forum. Trans Tech Publications, Switzerland. Vol. 735. 2013. P. 232-239.
5. *Васин Р.А., Муравлев А.В., Чистяков П.В.* Вариант определяющих соотношений истокообразного вида с использованием внутреннего времени в механике сверхпластических материалов. – Механика машин, механизмов и материалов. 2010. № 2(11), с. 64-65.
6. *Bhaskaran K., Jha B.B., Mishra B.K., Bylya O.I., Sarangi M.K., Chistyakov P.V., Muravlev A.V. and Vasin R.A.* Development of a variant of scalar constitutive equations suitable for description of the near super-plastic regimes of deforming // Applied Mechanics and Materials, 2012. V. 110-116, P. 163-169
7. *Васин Р.А., Быля О.И.* О формулировке условия сверхпластичности в задачах механики (проблема его экспериментального построения) // Письма о материалах, Том: 3, Выпуск: 2, 2013, с. 95-98.

Перспективы работ по данному направлению:

Разработка теории эксперимента с существенно неоднородным НДС образца для определения механических свойств материала образца.

Развитие методов идентификации и верификации определяющих соотношений.

Реализации концепции БД о структурно-механических свойствах материалов. Разработка подходов к построению определяющих соотношений, явно учитывающих эволюцию структуры материала.

Разработка варианта теории упругопластических процессов при конечных деформациях для изотропных разно-сопротивляющихся материалов.

Рассматриваются процессы сложного упругопластического нагружения материалов. Для описания их свойств используются стандартные обозначения, принятые в теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина [1]. Так $\bar{\sigma}$ и $\bar{\varepsilon}$ обозначают пары пятимерных векторов напряжений и деформаций, построенных на базе соответствующих тензоров-девиаторов. В [2] векторы напряжений и деформаций связываются между собой определяющими уравнениями

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = Q \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} + (P - Q)\bar{n}_\sigma \left(\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}, \bar{n}_\sigma \right) + (N - Q) \left(\bar{n}'_\varepsilon, \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} \right) \bar{n}'_\varepsilon, \quad (1)$$

$$C\Pi \equiv (\bar{n}_\sigma, \bar{n}_\varepsilon), \Psi \equiv 1 - C\Pi^2, \bar{n}'_\varepsilon \equiv \frac{(\bar{n}_\varepsilon - C\Pi\bar{n}_\sigma)}{\sqrt{\Psi}}.$$

в которые входят три функционала процесса деформаций P, N, Q , s – длина дуги траектории деформаций.

Для трехмерных процессов деформаций направляющие векторы напряжений и деформаций представляются в репере Френе разложениями:

$$\bar{n}_\sigma = \cos \theta_1 \bar{n}_1 - \sin \theta_1 (\cos \theta_2 \bar{n}_2 - \sin \theta_2 \bar{n}_3), \quad \bar{n}_\varepsilon = \cos \varphi_1 \bar{n}_1 - \sin \varphi_1 (\cos \varphi_2 \bar{n}_2 - \sin \varphi_2 \bar{n}_3).$$

Тогда из уравнения (1) следует система двух уравнений для углов θ_1, θ_2 :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta_1}{ds} &= \kappa_1 \cos \theta_2 - \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1 - \frac{N_1}{\sigma} \sin \theta_1 \Delta, \quad (3) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta_2}{ds} &= \kappa_2 - \kappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \sin \theta_2 - \frac{N_1}{\sigma} \sin \varphi_1 \sin(\theta_2 - \varphi_2), \quad (4) \end{aligned} \right.$$

$$\omega^2 \equiv \frac{\Delta^2}{\Psi}, \Delta \equiv \sin \theta_1 \cos \varphi_1 - \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \cos(\theta_2 - \varphi_2), \quad N_1 \equiv \frac{Q - N}{\sqrt{\Psi}} \omega.$$

Уравнения (3) и (4) определяют геометрический смысл основных функционалов Q, N_1 только на трехмерных процессах деформаций, но и на процессах произвольной размерности данная пара функционалов определяет векторные свойства материала. В этом случае основное уравнение (1) переписывается в виде:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = Q\bar{n}_1 + (P - Q) \cos \theta_1 \bar{n}_\sigma + N_1 \sin \theta_1 (\bar{n}_\varepsilon - (\bar{n}_\sigma, \bar{n}_\varepsilon) \bar{n}_\sigma). \quad (5)$$

Функционалы из уравнения (5) допускают представления через систему скалярных параметров, характеризующих экспериментальные данные процессов сложного нагружения тонкостенных трубок (с винтовыми траекториями деформации):

$$Q \approx \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_1} \frac{R}{\cos \alpha_0}, \quad \frac{N_1}{\sigma} \approx \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_1} \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Здесь κ_1, κ_2 кривизны траектории деформации, R, α_0 – характеристики траектории нагружения. Это довольно грубые оценки функционалов, но в большинстве экспериментов с траекториями весьма широкого диапазона кривизн и круток они имеют погрешности не выше 20%.

В классической теории пластичности для решения вопроса об упругопластическом переходе обычно вводят специальную поверхность, разделяющую области активного и пассивного процессов. В [3] показано, что существует альтернативный подход, не требующий введения ненаблюдаемых в экспериментах объектов, но базирующийся на базовых понятиях теории упругопластических процессов. Предложенный подход позволил вплотную подойти к основам термомеханики процессов сложного нагружения.

Дальнейшая работа по термомеханике упругопластических процессов предполагает рассмотрение в рамках подхода различных вариантов разделения элементарной работы на составные части. Каждый вариант позволит вычислить все термодинамические параметры процесса: внутреннюю энергию, диссипацию, определить законы разгрузки, а также получить формулы для вычисления диссипативных напряжений.

Литература

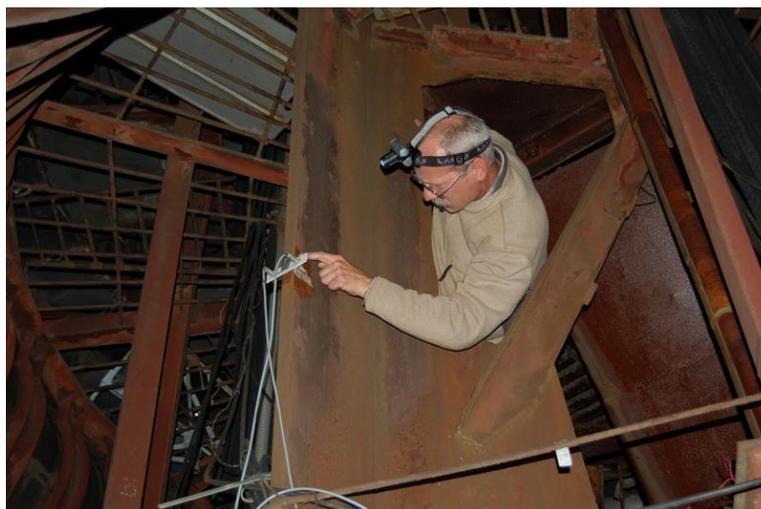
1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории // Изд-во АН СССР, Москва, -1963,- 272 с.
2. *Молодцов И.Н.* Процессы сложного нагружения в теории пластичности// В сборнике Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А.А.Ильюшина// Москва,-2006,-с.204-210.
3. *Молодцов И.Н.* Вариант теории пластичности при сложном нагружении: определяющие уравнения, калибровка функционалов, условие нагружения и уравнения разгрузки// В сборнике докладов международной конференции «Современные проблемы математики и механики», Тул.ГУ, ноябрь 2013г.-Тула: изд-во Тул.ГУ, 2013, 7с.

Результаты данного раздела получены сотрудниками кафедры профессорами Р.А.Васиным, И.Н.Молодцовым, и доцентом А.В.Муравлевым.

Результаты по разделу 5. **Динамика и прочность материалов и элементов конструкций**

Тензометрирование элементов шпилья ГЗ МГУ. На основе современных многоканальных тензометрических систем проведён анализ изменения со временем

деформированного состояния шпиля высотного здания МГУ. Экспериментально определены собственная частота и направление колебаний шпиля, а также максимальные деформации при различных ветровых нагрузках. Построена конечно-элементная стержневая модель, с использованием которой найдены частоты первых гармоник колебания шпиля. (на фото внизу с.н.с. П.В.Чистяков во время работ по тензометрированию шпиля ГЗ МГУ).



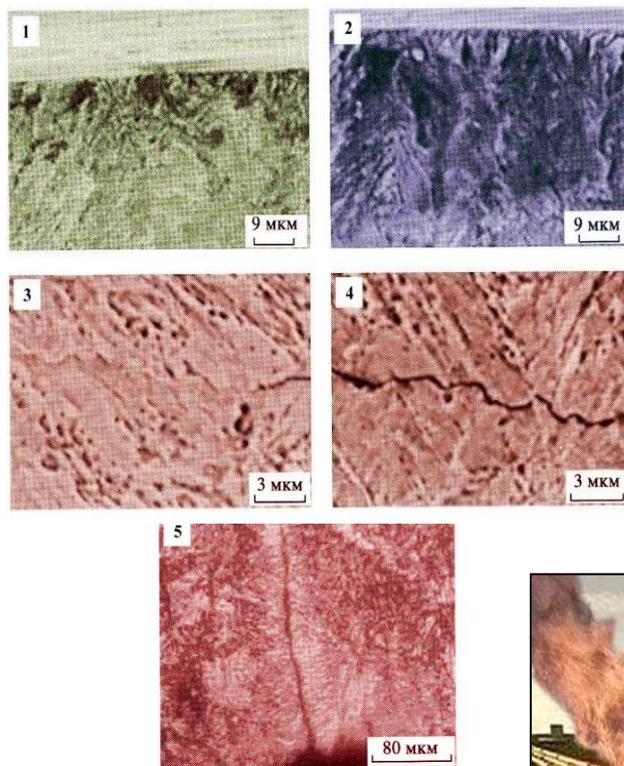
Литература

1. Кийко И.А., Муравлёв, А.В Сахаров., А.Н., Чистяков П.В., Новотный С.В., Жуков А.И. Тензометрическое исследование и расчёт деформированного состояния элементов конструкций шпиля высотного здания МГУ// Вестник МГУ, Сер.1.матем.,мех., 36,2011.С.37-40.

На основе накопленного в физике твердого тела и металловедении теоретико-экспериментального материала о развитии усталостного разрушения в металлах сформулирована система гипотез о развитии дефектов в металлах на микро-, мезо- и макроуровнях. Построена феноменологическая модель хрупкого усталостного разрушения

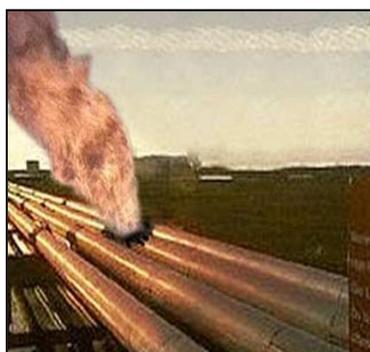
как стадийного процесса образования, развития и слияния дефектов типа хрупких микро- и макротрещин.

Развитие дефектов в аустенитно-мартенситной стали



Модель позволяет при известном физическом состоянии металла определять остаточную долговечность до окончательного разрушения для произвольных простых циклических процессов нагружения. Проведен анализ экспериментальных данных представительного ряда металлов и сплавов для различных простых процессов и подтверждена схема расчета по модели.

В проблеме оценки безопасности и долговечности протяженных конструкций задача оценки долговечности конструктивных элементов решается на основе предлагаемой модели и вероятности поражения людей и окружающей среды при их разрушении.



Литература

1. Завойчинская Э.Б. Микро- и макромеханика разрушения элементов конструкций // Известия РАН. Механика твердого тела, 2012. № 3. С. 54-77.
2. Завойчинская Э.Б. Процесс микроразрушения металлов при сложном напряженном состоянии // Механика машин, механизмов и материалов, 2011. № 3(16). С. 34-37.
3. Завойчинская Э.Б. К проблеме микроразрушения металлов при циклических нагрузках // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2010. № 1. С. 43-52.
4. Завойчинский Б.И., Завойчинская Э.Б., Волчанин А.В. Вероятностная оценка остаточных сроков безопасности эксплуатации протяженных конструкций//

Проведен анализ дифференциальных уравнений плоского напряженно-состояния упругих неоднородных тел. В аналитическом виде получено условие неустойчивости решения для напряжений и их производных высших порядков.

В задаче о распределении усилий в плоской статически неопределенной упругой шарнирно-стержневой решетке доказано, что решетка геометрически неизменяема тогда и только тогда, когда числа узлов на ее сторонах взаимно простые. Найдено аналитическое решение для прогиба решетки в ее плоскости.

Литература

1. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы// Строительная механика и расчет сооружений, 2014. № 6. С. 2-6.
2. Kirsanov M.N. Stress distribution instability in the plane problem of the theory of elasticity of heterogeneous bodies// Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.2013. Т. 54, № 3, С. 487-490.
3. Кирсанов М.Н. Эволюция кривых неустойчивости напряжений в плоской задаче теории упругости неоднородного тела// Вестник ЧГПУ имени И.Я.Яковлева.2012. Серия: Механика предельного состояния.

Результаты данного раздела получены сотрудниками кафедры профессорами И.А.Кийко, М.Н.Кирсановым и доцентом Э.Б.Завойчинской