Ю. Н. Сударев

Вычисление неопределённых интегралов

Методическое пособие для студентов географического факультета МГУ

Как известно, интегралы бывают двух видов: определённый и неопределённый. Их определения таковы, что поначалу кажется, что между ними нет ничего общего. Однако, в дальнейшем в знаменитой формуле Ньютона-Лейбница выясняется теснейшая связь между ними.

В данном пособии мы будем иметь дело исключительно с неопределённым интегралом. Напомним основные определения.

Пусть на некотором промежутке задана функция $f(x)$.

Первообразной функцией для $f(x)$ (коротко: **первообразной**) называется такая функция $F(x)$, для которой выполняется соотношение

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

Оказывается, что если существует одна такая первообразная, то существует бесконечно много и других первообразных, однако, **на промежутке** все они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. То есть если

$$F_1'(x) = f(x),$$

то $F_1(x) = F(x) + C$.

Слова « на промежутке » выделены здесь не случайно, поскольку, формулируя данное утверждение, многие забывают об этом условии и считают, что всегда первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга на константу. Но если, например, мы будем рассматривать не промежуток, а всю область определения, то данное утверждение, вообще говоря, будет ложным, как мы увидим далее на конкретных примерах.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется произвольная первообразная данной функции. Неопределённый интеграл обозначается следующим образом:

$$\int f(x)\,dx$$

Сам знак интеграла, этот самый «крючок» представляет собой стилизованную латинскую букву S - первую букву слова "Summa". Кто-то спросит: "А причём здесь сумма?" Сумма имеет прямое отношение к интегдралу, но чтобы это объяснить, надо углубиться в теорию интеграла определённого, чем мы здесь заниматься не будем. А что же стоит под знаком интеграла? Легко видеть, что там стоит дифференциал первообразной. Действительно,

$$dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$$

Мы видим, что операция неопределённого интегрирования является обратной к операции дифференцирования. Кроме того, поскольку неопределённый интеграл - это **произвольная** первообразная, в ответе всегда будет присутствовать произвольная постоянная.

Естественно выяснить: "А для каких функций существует первообразная?" Скажем лишь, что если функция непрерывна на некотором промежутке, то первообразная у неё существует.

Однако, здесь возникает ещё одно обстоятельство. У хорошо нам знакомых элементарных функций первообразные существуют, но далеко не всегда эти первообразные сами выражаются через элементарные функции. Так например, если я захочу получить явную формулу для интегралов

$$\int e^{-x^2}\,dx \quad \text{или} \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

то меня ждёт неудача. Происходит это потому, что множество первообразных от элементарных функций шире самого множества этих функций. Для сложных интегралов это представляет большую проблему: в поиске методов их вычисления мы не всегда можем быть уверены, что эти поиски увенчаются успехом.

Этим вопросом много занимались в девятнадцатом веке и получили целый ряд результатов. Однако, к настоящему времени этот вопрос потерял актуальность.

Разумеется, в вашем курсе вы должны научиться вычислять лишь простые интегралы, которые все берутся и не очень сложно.

Легко устанавливаются следующие свойства неопределённого интеграла:

$$
\begin{aligned}
&1. \quad \int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx \\
&2. \quad \int \left(f(x)+g(x)\right)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx
\end{aligned} \tag{2}
$$

Однако, здесь нужно дать комментарий к этим свойствам. Внимательный читатель может задать вопрос: "Как понимать, например, второе свойство?"Ведь мы назвали неопределённым интегралом **любую** первообразную. Допустим, во втором равенстве я выбрал для каждого интеграла конкретную первообразную, причём, для этих первообразных второе равенство справедливо. А теперь я в одном из этих интегралов возьму другую первообразную. Равенство, очевидно, нарушится. Как же понимать второе свойство? Ответ прост: равенства (2) верны с точностью до постоянного слагаемого. А поскольку, вычисляя интеграл, мы и ответ даём с точностью до произвольной постоянной, то данное замечание практического значения не имеет. Я привёл его здесь, чтобы не возникало никаких недоразумений. Заметим ещё, что во втором равенстве (2) речь идёт об интеграле от суммы. Но аналогичное утверждение верно и для интеграла от разности, поскольку вычесть какое-нибудь слагаемое — это всё равно, что прибавить его, умножив предварительно на минус единицу.

Итак, если нам удалось найти какую-то первообразную $F(x)$ для нашей функции, то окончательный ответ выглядит так:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Когда мы вычисляли производные от элементарных функций, то кроме правил дифференцирования, мы пользовались таблицей производных. Аналогичная таблица существует и для интегралов. Сейчас мы приведём её, но прежде отметим очевидное соотношение

$$\int dx = x + C.$$

Итак,

$$
\begin{array}{ll}
1. & \displaystyle\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \qquad (p \neq -1) \\
2. & \displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \\
3. & \displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1) \\
4. & \displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C \\
5. & \displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C \\
6. & \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \\
7. & \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \\
8'. & \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\
9'. & \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C
\end{array}
$$

Убедиться в справедливости этих формул очень просто: нужно взять производную от правой части и увидеть, что получается подинтегральная функция. По существу эти девять формул являются обращением соответствующих формул из таблицы производных. Последние две формулы нумеруются со штрихом, поскольку в дальнейшем они будут заменены на более общие формулы.

Спрашивается: "А где справедливы эти формулы?"
Ответ такой: "**На любом промежутке**, где существуют левая и правая части."

Теперь рассмотрим, например, вторую формулу. Область определения и левой, и правой части — это вся ось OX с выброшенным началом координат. В качестве первой первообразной я возьму $\ln|x|$, а в качестве второй — функцию, которая слева от нуля тоже равна $\ln|x|$, а справа от нуля равна $\ln|x| + 1$. То, что это тоже первообразная, проверяется простым дифференцированием. Можем ли мы сказать, что на всей области определения эти две первообразные отличаются на константу? Разумеется, нет, поскольку слева от нуля такая константа равна нулю, а справа от него она равна единице. Это иллюстрация к моему приведённому ранее замечанию о том, что утверждение об отличии любых двух первообразных на константу справедливо лишь на промежутке.

Отметим ещё одно обстоятельство. Можем ли мы, например, вместо формулы 8' написать формулу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C\,?$$

Разумеется, можем, поскольку производная правой части также совпадает с подинтегральной функцией. Означает ли это, что

$$\arcsin x = -\arccos x\,?$$

Конечно, нет. А вот вся совокупность функций в правых частях этих формул будет одна и та же. Только, чтобы получить какую-нибудь конкретную функцию, нужно в этих двух формулах константы C выбирать разными.

Таким образом, ответы при вычислении интеграла могут по внешнему виду отличаться друг от друге и при этом быть справедливыми. Особенно это относится к интегралам от тригонометрических функций. Некоторые из них можно вычислять разными способами. При этом ответы по внешнему виду могут быть совсем не похожими друг на друга.

Приступим теперь к вычислению конкретных интегралов.

Пример 1.

$$\int \left(x^2 - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x^2} - 3\cos x \right) dx = \int x^2\,dx - 2\int \frac{dx}{x} + \int x^{\frac{2}{3}}\,dx - 3\int \cos x\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2\ln|x| + \frac{3}{5}\,x^{\frac{5}{3}} - 3\sin x + C = \frac{1}{3}\,x^3 - 2\ln|x| + \frac{3}{5}\,x\sqrt[3]{x^2} - 3\sin x + C$$

Мы видим, что наш интеграл представляет собой комбинацию табличных интегралов. Иногда требуется предварительно преобразовать подинтегральную функцию.

Пример 2.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$$

Однако, таким способом можно вычислять лишь очень простые интегралы. Даже такой простой интеграл, как

$$\int \cos 2x\,dx$$

таким способом не взять.

Поэтому приходится применять более сложные методы. Одним из таких очень эффективных и постоянно употребляемых методов является метод замены переменной, или, как его ещё называют, метод подстановки.

Пусть для некоторой непрерывной функции $f(u)$ на каком-то промежутке выполнено равенство

$$\int f(u)\,du = F(u) + C. \tag{3}$$

Здесь u — независимая переменная. А теперь подставим в интеграле вместо независимой переменной u некоторую дифференцируемую функцию $u(x)$. Какой получится ответ? Оказывается, ответ очень прост: надо и в правую часть равенства (3) подставить эту самую функцию $u(x)$. Таким образом, справедливо равенство

$$\int f\left(u(x)\right)\,du(x) = F\left(u(x)\right) + C \tag{4}$$

Пример 3.

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

Здесь мы внесли число 2 сначала под знак интеграла, а потом под знак дифференциала, пользуясь свойствами интеграла и дифференциала. Дробь $\frac{1}{2}$ появилась для компенсации этой двойки, которая отсутствовала в исходном интеграле.

Пример 4.

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\,dx^3 = \frac{1}{3}\,e^{x^3} + C$$

В последних двух примерах первоначальная переменная u подразумевалась, но явно не фигурировала. В более сложных примерах бывает целесообразно ввести её явно.

Пример 5.

$$\int x\sqrt[3]{1-3x^2}\,dx = \left|\begin{array}{r} 1-3x^2=u \\ -6xdx=du \end{array}\right| = -\frac{1}{6}\int \sqrt[3]{u}\,du = -\frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{3}}\,du =$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}\,u^{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{8}u\sqrt[3]{u} = -\frac{1}{8}(1-3x^2)\sqrt[3]{1-3x^2} + C$$

Ответ должен быть дан в первоначальной переменной x.

Теперь внесём некоторые изменения и дополнения в таблицу интегралов. Прежде всего заменим формулы $8'$ и $9'$ новыми формулами.

$$8.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$9.\quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

Справедливость этих формул проверяется простым дифференцированием. Теперь добавим ещё несколько формул.

$$10.\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C \qquad (A \neq 0)$$

$$11.\quad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$12.\quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| + C$$

$$13.\quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Они также проверяются простым дифференцированием. На неофициальном математическом жаргоне формулу 10 называют «длинный логарифм», а формулу 11 — «высокий логарифм».

Договоримся ещё о том, что если в табличной формуле параметр фигурирует в виде a^2, то мы будем считать, что $a > 0$. Это, очевидно, не приведёт к потере общности, поскольку положительное число a^2 всегда можно представить как квадрат другого положительного числа a.

Пример 6.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

Этот пример решается методом выделения полного квадрата.

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+2}} =$$

$$= \ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+2}\right| + C = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + C$$

Пример 7.

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx$$

В таких интегралах, где в числителе стоит линейная функция, а в знаменателе — корень из квадратного трёхчлена или просто квадратный трёхчлен, нужно сначала выделить в числителе производную этого квадратного трёхчлена, а потом разбить интеграл на два слагаемых.

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(-2x-2)-3}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$$

Вычислим по отдельности два новых интеграла.

$$\int \frac{2x-2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{d(1-2x-x^2)}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \\ = \int (1-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1-2x-x^2) = 2\sqrt{1-2x-x^2} + C_1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} 1-2x-x^2 = -(x^2+2x-1) = \\ -\big((x+1)^2-2\big) = 2-(x+1)^2 \end{array} \right| = \\ = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C_2$$

Окончательно,

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Пример 8.

$$\int \frac{2x+1}{1-6x-2x^2}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}(-4x-6)-2}{1-6x-2x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-4x-6}{1-6x-2x^2}\,dx - 2\int \frac{dx}{1-6x-2x^2}$$

$$\int \frac{-4x-6}{1-6x-2x^2}\,dx = \int \frac{d(1-6x-2x^2)}{1-6x-2x^2} = \ln|1-6x-2x^2| + C_1$$

$$\int \frac{dx}{1-6x-2x^2} = \left| \begin{array}{r} 1-6x-2x^2 = -2\left(x^2+3x-\frac{1}{2}\right) = \\ = -2\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}\right) \end{array} \right| = \\ = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\frac{11}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\frac{\sqrt{11}}{2}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}+\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\frac{\sqrt{11}}{2}-\left(x+\frac{3}{2}\right)}\right| + C_2 = \\ = \frac{1}{2\sqrt{11}}\ln\left|\frac{\sqrt{11}+3+2x}{\sqrt{11}-3-2x}\right| + C_2$$

Окончательно,

$$\int \frac{2x+1}{1-6x-2x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left|1-6x-2x^2\right| - \frac{1}{\sqrt{11}}\ln\left|\frac{\sqrt{11}+3+2x}{\sqrt{11}-3-2x}\right| + C$$

Пример 9.

$$\int \frac{2x+3}{x^2+4x+7}\,dx = \int \frac{(2x+4)-1}{x^2+4x+7}\,dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+4x+7}$$

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,dx = \int \frac{d(x^2+4x+7)}{x^2+4x+7} = \ln\left|x^2+4x+7\right| + C_1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+7} = \left|x^2+4x+7 = (x+2)^2+3\right| = \int \frac{d(x+2)}{3+(x+2)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C_2$$

Окончательно,

$$\int \frac{2x+3}{x^2+4x+7}\,dx = \ln\left|x^2+4x+7\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C.$$

Существует ещё один важный метод вычисления интегралов, который имеет более узкую область применения, чем метод замены переменной. Зато там, где он применим, никакой другой метод не поможет. Речь идёт о так называемом методе **интегрирования по частям**. Трудно сказать, откуда взялось такое название. В чём же он состоит?

Пусть на некотором промежутке даны две непрерывно дифференцируемые функции (т. е. функции, имеющие непрерывную производную первого порядка) $u(x)$ и $v(x)$. Тогда справедлива формула

$$\int v(x)\,du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)\,dv(x) \tag{5}$$

Мы уже упоминали ранее, что интегрирование — операция, обратная к дифференцированию. Поэтому каждое свойство интеграла является, так сказать, зеркальным отражением свойств производных. Например, метод замены переменной — это отражение правила дифференцирования сложной функции. А вот, метод интегрирования по частям — отражение правила дифференцирования произведения двух функций. Посмотрим, как работает этот метод.

Пример 10.

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int x\,de^{2x} = \frac{1}{2}\left(xe^{2x} - \int e^{2x}\,dx\right) = \frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\,d2x =$$
$$= \frac{1}{2}\,xe^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x} + C = \frac{1}{4}\,(2x-1)e^{2x} + C$$

Пример 11.

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -\int x^2\,de^{-x} = -\left(x^2e^{-x} - \int e^{-x}\,dx^2\right) = -x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}\,dx =$$
$$= -x^2e^{-x} - 2\int x\,de^{-x} = -x^2e^{-x} - 2\left(xe^{-x} - \int e^{-x}\,dx\right) =$$
$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2\int e^{-x}\,d(-x) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C =$$
$$= -(x^2+2x+2)e^{-x} + C$$

Мы видим, что здесь пришлось интегрировать по частям два раза. Вообще, подобным образом берутся интегралы вида

$$\int P_n(x)e^{kx}\,dx\,,$$

где $P_n(x)$ — многочлен $n-$го порядка. При этом применять формулу (5) придётся n раз.

Пример 12.

$$\int x^2\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int x^2\,d\sin 3x = \frac{1}{3}\left(x^2\sin 3x - 2\int x\sin 3x\,dx\right) =$$
$$= \frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}\int x\,d\cos 3x = \frac{1}{3}\,x^2\sin 3x + \frac{2}{9}\left(x\cos 3x - \int \cos 3x\,dx\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\,x^2\sin 3x + \frac{2}{9}\,x\cos 3x - \frac{2}{27}\,\sin 3x + C$$

Аналогично вычисляются интегралы вида

$$\int P_n(x)\cos kx\,dx \quad \text{и} \quad \int P_n(x)\sin kx\,dx\,,$$

где $P_n(x)$ — многочлен $n-$го порядка.

Вообще, метод интегрирования по частям хорошо применять тогда, когда в результате попадания функции $v(x)$ из формулы (5) под знак дифференциала интеграл упрощается.

Пример 13.

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$$

Пример 14.

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} x\, dx^2 = \frac{1}{2} \left(x^2 \operatorname{arctg} x - \int x^2\, d \operatorname{arctg} x \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$$

(см. пример 2)

Пример 15.

$$\int \frac{x \cos x\, dx}{\sin^3 x} = \int x \frac{d \sin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2} \int x\, d \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\, \frac{x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}\, \frac{x}{\sin^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + C$$

А теперь рассмотрим один пример, где метод интегрирования по частям применяется особым образом.

Пример 16.

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0)$$

Обозначим наш интеграл через J. Имеем следующую цепочку выкладок:

$$J = \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a} \int \sin bx\, de^{ax} = \frac{1}{a} \left(e^{ax} \sin bx - b \int e^{ax} \cos bx\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{a}\, e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} \int \cos bx\, de^{ax} == \frac{1}{a}\, e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} \left(e^{ax} \cos bx - \int e^{ax}\, d \cos bx \right) =$$

$$= \frac{1}{a}\, e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2}\, e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}\,(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}\, J$$

Таким образом, мы получили уравнение первого порядка относительно неизвестного J. Отсюда

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) J = \frac{e^{ax}}{a^2}\, (a \sin bx - b \cos bx)$$

$$J = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\, (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

Аналогично вычисляется и

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx\,.$$

Разберём ещё один пример, где метод интегрирования по частям применяется подобным образом.

Пример 17.

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\begin{aligned}
J &= \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\,d\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} - J + a^2\arcsin\frac{x}{a} + C_1 \\
2J &= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} + C_1
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (6)$$

Обычно формулу (6) заносят в расширенную таблицу интегралов, куда, кстати, заносят и ещё одну формулу.

$$\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C \qquad (7)$$

Эта формула доказывается так же, как и формула (6).

Заметим, что формулу (6) можно было бы доказать и с помощью метода замены переменных. Покажем, как это можно сделать.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \left|\begin{matrix} x = a\sin u \\ u = \arcsin\dfrac{x}{a} \\ dx = a\cos u\,du \end{matrix}\right| = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}\;a\cos u\,du = \\
&= a^2\int \sqrt{1-\sin^2 u}\;\cos u\,du = a^2\int \cos^2 u\,du = \\
&= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2u)\,du = \frac{a^2}{2}u + \frac{a^2}{4}\sin 2u + C = \\
&= \frac{a^2}{2}\sin u\cos u + \frac{a^2}{2}u + C = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C = \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C
\end{aligned}$$

А теперь рассмотрим некоторые классы интегралов от тригонометрических функций и методы их вычисления.

Рассмотрим интеграл

$$\int \cos^m x \cdot \sin^n x \, dx\,, \tag{8}$$

где m и n — целые неотрицательные числа.

Вначале займёмся случаем, когда среди чисел m и n хотя бы одно нечётно.

Пример 18.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \, d\sin x = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, d\sin x =$$
$$= \int \sin^2 x \, d\sin x - \int \sin^4 x \, d\sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

Так же вычисляются и остальные подобные интегралы.

Заметим ещё, что если оба числа m и n нечётные, то выгоднее заносить под дифференциал ту функцию, у которой степень меньше. При этом выкладки получатся проще.

Теперь рассмотрим случай, когда числа m и n чётные (напомним, что мы считаем ноль тоже чётным числом). В этом случае мы используем формулы понижения степени.

Пример 19.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x \, dx =$$
$$= \int \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{8} \int (\sin 2x)^2 \, dx + \frac{1}{8} \int (\sin 2x)^2 \cos 2x \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx + \frac{1}{16} \int (\sin 2x)^2 \, d\sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} (\sin 2x)^3 + C$$

Следующий тип интегралов — это интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx \, dx\,; \quad \int \sin ax \sin bx \, dx\,; \quad \int \cos ax \cos bx \, dx \tag{9}$$

Здесь нужно воспользоваться формулами преобразования произведения в сумму. Напомним их.

$$\begin{aligned}\sin ax\cos bx &= \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\Big)\\ \cos ax\cos bx &= \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\Big)\\ \sin ax\sin bx &= \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\Big)\end{aligned}\tag{10}$$

Пример 20.

$$\int \sin 2x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int\Big(\sin 5x+\sin(-x)\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 5x\,dx-\frac{1}{2}\int \sin x\,dx =$$
$$= -\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x + C$$

Следующий тип интегралов — это интегралы

$$\int \operatorname{tg}^n x\,dx \quad \text{и} \quad \int \operatorname{ctg}^n x\,dx\,, \tag{11}$$

где n — натуральное число, большее или равное двум.

Пример 21.

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg} x\,(\operatorname{tg} x)^2\;dx = \int \operatorname{tg} x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\,dx =$$
$$= \int\frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x\,dx = \operatorname{tg} x - \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \operatorname{tg} x + \int\frac{d\cos x}{\cos x} =$$
$$= \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$$

Пример 22.

$$\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx = \int (\operatorname{ctg} x)^2\cdot(\operatorname{ctg} x)^2\;dx = \int (\operatorname{ctg} x)^2\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\,dx =$$
$$= -\int (\operatorname{ctg} x)^2\;d\operatorname{ctg} x - \int (\operatorname{ctg} x)^2\;dx = -\frac{1}{3}\,(\operatorname{ctg} x)^3 - \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\,dx =$$
$$= -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C$$

Наконец, рассмотрим интегралы вида

$$\int\frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}. \tag{12}$$

В этом случае нужно сделать замену переменной $u=\operatorname{tg} x$ или $u=\operatorname{ctg} x$.

Пример 23.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 3)} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = u \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = du \end{matrix} \right| = \int \frac{dx}{n^2 - 2u + 3} = \int \frac{d(u-1)}{(u-1)^2 + 2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{u-1}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Пример 24.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 1} = \int \frac{dx}{\sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x)} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x + \cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x(\operatorname{ctg}^2 x + 2)} = \left| \begin{matrix} \operatorname{ctg} x = u \\ -\dfrac{dx}{\sin^2 x} = du \end{matrix} \right| = -\int \frac{du}{2 + u^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} + C = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

А что делать, если в знаменателе стоит не квадратичное выражение от $\sin x$ и $\cos x$, а линейное? В этом случае нужно сначала перейти к половинному аргументу, а затем действовать, как раньше.

Пример 25.

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 1} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + \left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dx}{3\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3 + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = u \\ \dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = du \end{matrix} \right| = 2\int \frac{du}{3 - 2u - u^2} = 2\int \frac{d(u+1)}{4 - (u+1)^2} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \ln\left|\frac{2 + (u+1)}{2 - (u+1)}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{3+u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{3 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C$$

Разумеется, существуют и более сложные интегралы от тригонометрических функций, которые мы в данном пособии не рассматриваем.