VIII ОЛИМПИАДА
по "экстремальным задачам"
04 мая 2017 г.
Р Е З У Л Ь Т А Т Ы
1 место
Карпов Артем Эльшанович 30(0,10,10,5,5) 4 курс
2 место
Шайхиева Талия Маратовна 25 (2,3,10,5,5) 4 курс
Джунусов Сергей Назимович 25(0,10,10,5,0) 3 курс
Улюмджиев Дмитрий Семенович 25(0,10,10,5,0) 3 курс
3 место
Девятко Александр Игоревич 21 (0,6,10,5,0) 4 курс
Оганесян Кристина Артаковна 20(0,10,0,5,5) 4 курс
Зозуленко Михаил Александрович 20 (0,0,10,5,5) 5 курс
Косинов Никита Андреевич 20 (0,10,0,5,5) 2 курс
участвовали:
Хасанов Равиль Эрикович 10 (0,10,0,0,0) 3 курс
Акопян Давид Арсенович 5 (0,5,0,0,0) физ-фак 4 курс
Гасанов Магамедюсуф Владимирович 2 (0,0,2,0,0) НИУ МГСУ
Федоров Константин Дмитриевич 2 ((0,2,0,0,0) 2 курс

Задачи и решения

Задача 1 (*Локуциевский Л.В.*): Доказать, что если сумма n действительных чисел больше 1, то среди них найдутся k чисел произведение которых больше $2^{-k(k+1)/2}$.

Решение. Сразу отбросим все отрицательные и нулевые числа: сумма положительных по-прежнему будет больше 1. Основная идея заключается в следующем: предположим, что произведение любых k чисел не превосходит $2^{-k(k+1)/2}$. Тогда ясно, что наибольшее число не превосходит $\frac{1}{2}$. Если оно равно $\frac{1}{2}$ то следующее по старшенству число не превосходит $\frac{1}{4}$. Если оно ровно $\frac{1}{4}$, то следующее не больше $\frac{1}{8}$. И так далее. В результате получаем последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}$$

сумма которой есть $1 - 2^{-n} < 1$.

Описанная выше идея, конечно, не является доказательством (так как, например, не ясно, почему наибольшее число равно $\frac{1}{2}$), но наводит на логику доказательства. Обозначим

$$s_k = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

и докажем следующее утверждение по индукции.

Утверждение: Если $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$ и

$$\begin{cases} x_1 & \leq & 2^{-s_1} \\ x_1x_2 & \leq & 2^{-s_2} \\ \ldots & & \\ x_1\ldots x_n & \leq & 2^{-s_n} \end{cases} \tag{1}$$

то $x_1 + \ldots + x_n \leq 1 - 2^{-n}$.

Доказательство проведем по индукции. База тривиальна: при $n = 1$ утверждение очевидно выполнено. Предположим теперь, что мы доказали утверждение для всех наборов меньше чем из n чисел. Докажем его для произвольного набора из n чисел.

Итак, мы имеем набор $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$, для которого выполняются неравенства (1). Оценим сверху максимальное значение суммы $x_1 + \ldots + x_n$.

Сначала предположим, что для некоторого $k < n$, k-ое неравенство превратилось в равенство:

$$x_1 \ldots x_k = 2^{-s_k}$$

Разделим набор на 2 поднабора $x_1, \ldots, x_k$ и $x_{k+1}, \ldots, x_n$ и оценим суммы в каждом из них по отдельности. Для первого поднабора по предположению индукции, очевидно, имеем

$$x_1 + \ldots + x_k \leq 1 - 2^{-k}.$$

Оценим сумму второго набора. Если обозначить $z = x_1 \ldots x_k = 2^{-s_k}$, то неравенства с номерами от $k + 1$ до n принимают вид

$$\begin{cases} zx_{k+1} \leq 2^{-s_{k+1}} & \Longrightarrow & x_{k+1} \leq 2^{-(s_{k+1}-s_k)} = 2^{-k}2^{-s_1}; \\ zx_{k+1}x_{k+1} \leq 2^{-s_{k+2}} & \Longrightarrow & x_{k+1}x_{k+2} \leq 2^{-(s_{k+2}-s_k)} = 2^{-2k}2^{-s_2}; \\ \ldots & & \\ zx_{k+1}\ldots x_n \leq 2^{-s_n} & \Longrightarrow & x_{k+1}\ldots x_n \leq 2^{-(s_n-s_{k+1})} = 2^{-(n-k)k}2^{-s_{n-k}}. \end{cases}$$

Обозначая

$$y_1 = 2^k x_{k+1}, \quad y_2 = 2^k x_{k+2}, \quad \ldots \quad , \quad y_{n-k} = 2^k x_n,$$

видим, что к набору $y_1, \ldots, y_{n-k}$ можно применить предположение индукции, поэтому

$$y_1 + \ldots + y_{n-k} \leq 1 - 2^{-(n-k)}.$$

Таким образом,

$$(x_1 + \ldots + x_k) + (x_{k+1} + \ldots + x_n) \leq (1 - 2^{-k}) + 2^{-k}(1 - 2^{-(n-k)}) = 1 - 2^{-n}.$$

Итак, осталось разобрать случай когда все неравенства в (1), кроме, возможно, последнего, являются строгими. Попробуем тогда все числа x_j немного увеличить. Так прямолинейно действовать, конечно, нельзя: может нарушиться последнее неравенство. Чтобы его не испортить поступим так: выберем $\lambda > 1$ и обозначим

$$\widetilde{x}_1 = \lambda x_1,\ \widetilde{x}_2 = \lambda x_2,\ \ldots,\ \widetilde{x}_{n-1} = \lambda \widetilde{x}_{n-1}\ \text{ и }\ \widetilde{x}_n = x_n/\lambda^{n-1}$$

Последня переменна выбрана так, что $x_1 \ldots x_n = \widetilde{x}_1 \ldots \widetilde{x}_n$. Поэтому, если $\lambda > 1$ достаточно близко к 1, то набор $\widetilde{x}_1, \ldots \widetilde{x}_n$ удовлетворяет неравенствам (1). Постепенно увеличивая λ от 1 к $+\infty$ найдем момент, когда какое-то из неравенств (кроме последнего) впервые превратится в равенство. Более того, для любого $\lambda > 1$ выполнено $\widetilde{x}_1 \geq \widetilde{x}_2 \geq \ldots \geq \widetilde{x}_{n-1} \geq \widetilde{x}_n > 0$. Поэтому по доказанному выше

$$\widetilde{x}_1 + \ldots + \widetilde{x}_n \leq 1 - 2^{-n}$$

Осталось убедится что

$$\widetilde{x}_1 + \ldots + \widetilde{x}_n \geq x_1 + \ldots + x_n$$

Обозначим для краткости $a = x_1 + \ldots x_{n-1}$, $b = x_n$ и докажем, что функция

$$f(\lambda) = \lambda a + \frac{b}{\lambda^{n-1}}$$

является возрастающей при $\lambda \geq 1$.

Действительно, $f'(\lambda) = a - \frac{(n-1)b}{\lambda^n}$ и $f'(\lambda) > 0$ при $\lambda > \sqrt[n]{\frac{(n-1)b}{a}}$. Осталось заметить, что $\frac{(n-1)b}{a} \leq 1$, так как

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \geq x_n + x_n + \ldots + x_n = (n-1)x_n.$$

Задача 2 (*Заплетин М.П.*). Найти точку в плоскости, чтобы сумма расстояний от неё до вершин четырехугольника была минимальной.

Решение. Если четырехугольник выпуклый, то это точка пересечения диагоналей. Для любой другой точки плоскости сумма расстояний больше по неравенству треугольника.

Если четырехугольник ABCD не выпуклый и A лежит внутри треугольника BCD, то O (искомая точка) совпадает с A. Зафиксируем сумму BO+DO - множество точек образуют эллипс, значит искомая точка на прямой AC по неравенству треугольника. Если $O \in [AC]$, то $BO + DO \geq BA + DA$. Если O лежит вне ABCD , то $BO + OA + DO + OA \geq BA + DA$.

Задача 3 (*Протасов В.Ю.*). Найти геометрическое место точек минимума $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ всевозможных решений дифференциального уравнения $\ddot{x} + t\dot{x} + sin^2 x = 0$. ($(t_1, x_1)$ - точка минимума, если $x(t_1) = x_1$ и $x(t) \geq x_1, \forall t \in \mathbb{R}$)

Решение. Если (t, x) - точка минимума, то $\dot{x} = 0, \ddot{x} \geq 0$ поэтому $sin^2 x \leq 0$, следовательно $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. С другой стороны $x = \pi k$ является решением, следовательно все точки прямой $x = \pi k$ - точки минимума этого решения.

Задача 4 (*Локуциевский Л.В., Мырикова В.А.*). Пусть $A_1 A_2 \ldots A_n$ – выпуклый многоугольник на плоскости (вершины пронумерованы по порядку), а O – его внутренняя точка. Обозначим через O_j основание перпендикуляра из O на прямую, содержащую сторону $A_j A_{j+1}$ (считая $A_{n+1} = A_1$).

1. Верно ли, что найдется хотя бы один такой номер j, что O_j лежит строго внутри стороны $A_j A_{j+1}$?

2. Существуют ли такие выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_n$ и точка O внутри него, что вершина A_{j+1} лежит строго внутри $O_j A_j$ для всех $j = 1, \ldots, n-1$?

Решение п.1. Рассмотрим ближайшую точку P к O из многоугольника (такая должна найтись, так как многоугольник – компактное множество). Точка P не может совпадать с вершиной, так как многоугольник – выпуклый. Следовательно P – внутренняя точка какой-то стороны, и, следовательно отрезок OP перпендикулярен этой стороне.

Решение п.2. Такой многоугольник можно построить явно при любом $n \geq 4$. Способов существует множество. Например так. Начнем с прямоугольного треугольника OA_1A_2 с гипотенузой OA_2 и углом $\alpha_1 = \angle A_1OA_2$. Построим теперь на OA_2 как на катете прямоугольный треугольник OA_2A_3 с гипотенузой OA_3 и углом $\alpha_2 = \angle A_2OA_3$. Далее по индукции на k-ом шаге строим на OA_k как на катете прямоугольный треугольник OA_kA_{k+1} с гипотенузой OA_{k+1} и углом $\alpha_k = \angle A_kOA_{k+1}$. Так продолжаем, пока $k < n$, а последний треугольник OA_nA_1 оставляет таким, какой получился.

Если

$$\pi < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} < 2\pi,$$

то построенный многоугольник $A_1 \ldots A_n$ всегда является выпуклым, а точка O лежит внутри него,

Легко видеть, что для такого многоугольника $O_1 = A_1$, $O_2 = A_2$, …, $O_{n-1} = A_{n-1}$ и $O_n \in (A_n; A_1)$. Теперь сдвинем каждую сторону многоугольника $A_1 \ldots A_n$ параллельно самой себе на одно и тоже достаточно маленькое расстояние $\varepsilon > 0$ в сторону точки O. Легко убедится, что новые прямые образуют искомый выпуклый многоугольник $A'_1 \ldots A'_n$.

Таким методом можно построить даже четырехугольник, если взять углы $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 > \pi$. Треугольник же построить невозможно, так как $\alpha_j < \pi/2$.