**Олимпиада по уравнениям с частными производными**
**25 апреля 2024 года**

1. Решите в классе обобщенных функций задачу Коши

$$u''' + 3u'' + u' - 5u = \delta''(x-1) + \theta(x), \quad u|_{x<0} = 0.$$

2. Найдите классическое (класса $C^1(\mathbb{R}^2) \cap C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{y=0\})$) ограниченное решение задачи

$$u_{xx} = (\operatorname{sgn} y)\, u_{yy}, \quad u|_{y=0} = \sin^2 x,$$

в плоскости $\mathbb{R}^2$ и доказать его единственность.

3. Существует ли гармоническая функция $u \in L_1(R^2)$, такая, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 u(2^k, 2^k)$ расходится?

4. Рассмотрим в области $Q_T = \{(x,t) :\ x \in \mathbb{R},\ 0 < t < T\}$ задачу Коши

$$u_t = (x^2+1)((x^2+1)u_x)_x, \quad u|_{t=0} = \varphi(x).$$

Верно ли, что для любого ограниченного классического решения этой задачи выполнен принцип максимума

$$\sup_{(x,t)\in Q_T} u \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi?$$

5. Найдите все функции $u(\mathbf{x})$, гармонические в области $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < \|\mathbf{x}\| \leqslant 1\}$, равные нулю при $\|\mathbf{x}\| = 1$ и удовлетворяющие условию

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to 0} |\mathbf{x}|\ u(\mathbf{x}) = 2024.$$

6. В секретной лаборатории колеблется струна из экспериментального материала, закрепленная на концах и имеющая длину $\pi$.

К струне подключена большая кнопка. При нажатии кнопки скорость распространения волн в струне мгновенно меняется, а именно увеличивается вдвое. Когда кнопку отпускают, скорость распространения волн принимает исходное значение.

Скорость и форма струны меняются непрерывно.

Пусть в начальный момент времени струна имела нулевую скорость, а её форма задавалась уравнением $u(x,0) = \sin^2 x$.

Возможно ли так подобрать моменты нажатия и отпускания кнопки, чтобы отклонение струны от положения равновесия в какой-то точке $(x,t) \in (0,\pi)^2$ превысила по модулю 2024?

7. Пусть $\Omega = (0,1)^2$. При каких значениях $A \in \mathbb{R}$ функционал

$$J(u) = \int_\Omega (u_x^2 + u_y^2)\, dxdy + A \int_\Omega u\, dxdy + \int_{\partial\Omega} xu\, dS$$

имеет минимум на пространстве $W_2^1(\Omega)$?

8. Пусть обобщенная функция $\delta_{S_{1/2}}$ определена соотношением

$$(\delta_{S_{1/2}}, \varphi) = \int_{x^2+y^2=1/4} \varphi(x,y)\, dS.$$

Существует ли обобщенное решение задачи

$$\Delta u = \delta_{S_{1/2}} \text{ в } \Omega = \{x^2+y^2<1\}, \qquad u|_{x^2+y^2=1} = 0?$$

Если да, найдите его.