УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
ОЛИМПИАДА 2025

1. Найти все решения $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ уравнения $x^{2025}u^{(2025)} = 0$.

2. Сколько решений имеет краевая задача для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Pi = (0, \infty) \times (0, \pi),$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \quad u|_{x=0} = \varphi(y),$$

   где $\varphi(y)$ – гладкая функция, равная нулю на границе отрезка $[0, \pi]$?

3. Единственно ли в области $\{t > 2|x|\}$ решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u|_{t=2|x|} = 0?$$

4. Для каких α любое классическое решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + \alpha u, \quad (x, t) \in \Pi = (0, \pi) \times \mathbb{R},$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$$

   будет ограниченной функцией?

5. При каких значениях константы a любое ограниченное решение уравнения

$$u_{xx} + 2u_{xy} + au_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

   является константой?

6. Установите, разрешима ли задача

$$\begin{aligned} &u_{xy} + 2u = 1 \\ &u|_{\Gamma} = 1, \quad u_y|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \{y = x^2\}. \end{aligned}$$

7. Область Ω – единичный круг в двумерном пространстве с центром в начале координат. Функция $u(x)$ является решением задачи Дирихле

$$-\Delta u = e^{x^2+y^2} \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 2025.$$

   Докажите, что $u(x, y)$ инвариантна относительно поворотов системы координат вокруг точки $(0, 0)$.

8. Пусть $\Omega = (0, \pi)^2$. Верно ли, что $\max\limits_{\overline{\Omega}} |u| = \max\limits_{\partial\Omega} |u|$, если функция $u(x)$ является решением уравнения

$$\text{а) } \Delta u + 2025u = 0; \qquad \text{б) } \Delta u - 2025u = 0.$$