

О парадигме внутренней турбулентности.

Н. Н. Яковлев, Е. А. Лукашев,

Тураевское машиностроительное конструкторское бюро "Союз".

amntksoyuz@mail.ru, elukashov@yandex.ru

Е.В. Радкевич, В.В. Палин

МГУ им. М.В. Ломоносова

evrad07@gmail.com

УДК 517, 517.9, 536. Математика

Статья посвящена проблемам реконструкции начальной стадии внутренней турбулентности (без учета граничных эффектов), включая математическое описание возникновения двухскоростного режима (катастрофа Римана-Гюгонио) и перемежаемости. Литература: 41 название.

ВВЕДЕНИЕ. Существующие формы моделирования турбулентности отражают две крайности-волновую (вибрационная газовая динамика, см. например [1]) и, наиболее распространенную, диффузионную (статистическая) теорию турбулентности [28-31]. Современные подходы к теоретическому описанию начальной стадии внутренней турбулентности дают результаты, плохо согласуемые с экспериментом. Наша задача, построить реконструкцию начальной стадии турбулентности, промежуточную для этих двух крайностей, согласующую волновой и диффузионный характер турбулентности. Был построен математический объект [5]-[6], реконструирующий основные неустойчивости процесса и стабилизирующий их обратные связи. Грубо говоря, была построена аналоговая машина

для воспроизводства базовых свойств турбулентности. Ее создание потребовало согласования микро и макро масштабов, волнового и диффузионного процессов. В частности, удалось построить математическую реконструкцию начального этапа внутренней турбулентности, зарождение двухскоростного режима (катастрофы Римана-Гюгонио) и перемежаемости, и предложить возможную гипотезу, объясняющую их зарождение.

Трудности расчетов таких процессов заключаются в том, что моделирование проводится одновременно на нескольких масштабных уровнях. К настоящему времени в экспериментальных исследованиях изучены многие детали начальной стадии процесса внутренней турбулентности, но общего теоретического представления об этом процессе пока не существует. Модель, используемая в данной работе, основана на многоскоростной системе уравнений Эйлера, распространение возмущений в которой приводит к катастрофе Римана-Гюгонио, являющейся причиной возникновения двухскоростного режима. Для описания образования флуктуаций плотностей, приводящих к перемежаемости, используется модифицированное уравнение Кана-Хилларда. Разномасштабность требует значительных вычислительных ресурсов. Двумерные расчеты основаны на явных и явно-итерационных алгоритмах, эффективно реализованных на многопроцессорной вычислительной системе.

Современный прогресс технологии связывают, например, в области материаловедения с созданием наноматериалов и технологий их производства - нанотехнологий. Однако не верно будет утверждать, что об этом классе технологий не было известно до появления самого термина "нанотехнологии". К нанотехнологиям относят, в частности "золь-гель технологии отработанные за долго до появления терминов "наноматериалы" и "нанотехнологии". Методические основы технологии производства дисперсионно упрочненных сплавов, которые по характерным структурным параметрам относятся к наноматериалам, начали закладываться академиком С.Т. Кишкиным, начиная с работ 30-х годов [7]. В то же время появление самих терминов "наноматериалы" и "нанотехнологии" поставило задачу - дать критерий, отличающий эти материалы и технологии от других. С другой стороны, эти термины поставили вопрос о характерных чертах, объединяющих эти материалы в единый класс. Ответ заложен в самих терминах: характерный размер структуры больше микро размера (размера атомной или молекулярной структуры), но гораздо меньше макро размера образца материала (детали, конструкции, изделия). Это - промежуточный размер - мезоскопический структурный уровень. Кроме того, введение этих терминов поставило вопрос об общих теоретических основах производства и эксплуатации этих материалов, т.е. потребовалось теорети-

ческое обобщение. Как правило, "скелет" таких теоретических основ - это математический аппарат, разработанный для решения специфических задач конкретной области. Понимание множества причин, от которых зависят требуемые свойства материала, заставляет при создании таких математических моделей учитывать многие факторы, определяющие процессы формирования структур жаропрочных материалов. Этого можно достичь только используя совместно методы физического (экспериментального) и математического моделирования. Большая роль в этом отводится методам математического моделирования, которые развиваются бурными темпами благодаря использованию компьютерных технологий - быстродействующих компьютеров и высокоэффективных численных методов решения математических задач. В свою очередь в процессе совершенствования математических моделей физических процессов их формулировка все больше смещается от построений, базирующихся на эмпирических или полуэмпирических зависимостях, к моделям, строящимся на физических закономерностях фундаментального характера, так называемых "первых принципах". При этом, естественно, происходит усложнение этих моделей, которое, тем не менее, оказывается оправданным, во-первых, благодаря развитию методов прикладной математики и компьютерной техники и, во-вторых, из-за значительной экономии времени и средств за счет снижения объема экспериментальных исследований, конструкторской проработки, стендовых и летных испытаний. В данной работе представлена попытка обобщения термодинамической теории Кана-Хилларда на более широкий класс объектов по сравнению с тем, для которого она первоначально создавалась - описание процесса спинодального распада сплава [8,9]. Мезоструктурный масштаб представляет интерес не только для материаловедения. Характерный масштаб турбулентности (пульсации давления, завихренность по Тейлору и Томсону, моли Прандтля) также относится к этому структурному, но динамически подвижному, уровню. К объектам этого же масштаба следует отнести характерные размеры фронта ударной волны и элементов ее структуры: скачков уплотнения, ударных, энтропийных и релаксационных слоев. Кроме того, в настоящее время наблюдается повышенный интерес к методам управления состоянием гиперзвуковых пограничных слоев, что связано с разработкой перспективных летательных аппаратов с гиперзвуковой крейсерской скоростью. Ламинарно-турбулентный переход приводит к существенному увеличению сопротивления и сильному локальному нагреву теплонагруженных поверхностей летательных аппаратов [12, 13]. Проблема увеличения области ламинарного режима обтекания является одной из важнейших при их проектировании. Все перечисленные системы обладают одним общим свойством: они могут быть охарактеризованы как неоднородные на промежуточном масштабном уровне. В связи с этим представляет интерес разработка математического аппарата, фиксирующего "вложенность" одного структурного уровня в дру-

гой. Попытка разработки математического аппарата с иерархической структурой "вложенности" подобного типа была предпринята нами на примере спиноподобного распада сплавов [13 - 14]; эти работы явились продолжением и развитием работ [5 - 6], в частности, связанных с обобщением теории Кана-Хилларада на неизотермический случай.

БАЗОВЫЕ СВОЙСТВА ТУРБУЛЕНТНОСТИ. В этой статье мы продолжим исследование [12],[14], [5],[6] процессов с избыточной энергией. Кратко остановимся на выводах классической теории ударных волн. Течения жидкостей и газов, наблюдаемые в природных условиях и технических устройствах, делятся на два сильно отличающиеся друг от друга типа: ламинарные-спокойные, плавные, регулярные и турбулентные, в которых скорость, давление, температура и другие гидродинамические величины изменяются хаотично, неупорядоченно не только во времени, но и в пространстве. По-видимому, наиболее емкое и содержательное определение турбулентности принадлежит П.Брэдшоу (1971) [15]: "турбулентность-это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Она является обычным состоянием движущейся жидкости, за исключением течений при малых числах Рейнольдса". Существование резко различающихся ламинарных и турбулентных режимов течения было замечено еще в первой половине XIX в., но начало теории турбулентности было положено лишь в конце того же столетия в работах Осборна Рейнольдса (1883) [2, 4]. Изучая условия перехода ламинарного течения жидкости в трубах в турбулентное, Рейнольдс установил существование общего критерия динамического подобия течений вязкой несжимаемой жидкости, названного впоследствии его именем: $Re = (UL)/\nu =$ число Рейнольдса, где U и L - характерные масштабы скорости и длины в рассматриваемом течении, а ν - кинематический коэффициент вязкости (например, для течения в трубе U – среднерасходная скорость, L – диаметр трубы). Из опытов Рейнольдса следовало, что существенное влияние на характер течения в трубе оказывают возмущения на входе в нее. Если число Re достаточно мало, то эти возмущения затухают на некотором расстоянии, а течение в трубе является ламинарным. При достижении числом Re критического значения (в опытах Рейнольдса $Re_{кр} = 2000$) возмущения не затухают и движение в трубе становится турбулентным. Наиболее распространенной является интерпретация числа Рейнольдса как меры относительной значимости сил инерции и сил вязкости, действующих внутри жидкости. Силы инерции(см. [16]): "если они существенно превосходят силы вязкости, что соответствует большим числам Re , вызывают **перемешивание конечных объемов жидкости,**

движущихся с разными скоростями. В результате осуществляется передача энергии от крупномасштабных структур (вихрей) к менее крупным, образующимся за счет потери устойчивости более крупных вихрей. Иными словами, крупномасштабные структуры играют роль аккумуляторов энергии из основного потока. Поглощая энергию основного потока, эти структуры оказываются сильно анизотропными, завихренными и существенно отличаются от течения к течению."Там же [16]: "Основным механизмом генерации энергии турбулентности является деформация структур, представляющая собой трехмерный процесс, поэтому все развитые турбулентные течения являются трехмерными. Посредством нелинейных взаимодействий крупномасштабные структуры передают часть своей энергии менее крупным структурам и т.д. в результате реализуется так называемый каскадный механизм передачи энергии". Впервые описание этого процесса было дано Льюисом Ричардсоном (1922)(см. [2, 4]). Согласно Ричардсону каскадный процесс передачи энергии в турбулентном потоке, базирующийся на представлении о существовании иерархии вихрей, завершается на самых мелкомасштабных структурах вязкой диссипацией кинетической энергии в тепло. Однако понимание роли мелкомасштабной турбулентности в процессах турбулентного переноса пришло лишь после опубликования работы Джеффри Тэйлора (1935) [2, 4], в которой впервые было введено понятие об однородной и изотропной турбулентности. Основным свойством такой турбулентности является ее слабая зависимость от индивидуальных особенностей течения (локальная изотропия). В предельном случае можно говорить об инвариантности свойств изотропной турбулентности относительно любых ортогональных преобразований (параллельных переносов, вращений и т. д.).

В общей картине гиперзвукового течения рассматривается зона, непосредственно примыкающую к ударной волне, где наблюдаются явления диссоциации и химических реакций, что позволило выделить основные факторы течения, визуализация которых есть предмет этой статьи, а именно:

1)двухскоростное течение(катастрофа Римана-Гюгонио)

2)образование флуктуаций плотности

3)перемежаемость(полосчатость), на самой поверхности разрыва возникает рябь(аналог волны Маренгони)

4)согласование катастрофы Римана-Гюгонио и неустойчивостей, порождающих образование флуктуаций плотности.

5)при множественности стационарных состояниях переходы по закону "все или ничего"(переходы вандерваальсовского типа)

6)характерные неустойчивости: срыв струй с фронта ударной волны(аналог тейлоровской неустойчивости) и образование вихрей.

Приведем экспериментальное обоснование сформулированных выше базовых факторов течения:

Во-первых, при рассмотрении гофрировочной неустойчивости ударных волн отмечается, что: "Произвольное возмущение течения складывается из энтропийно-вихревой волны и звуковой волны. ... Возмущение в целом представляется линейной комбинацией возмущений обоих типов"[17](Теоретическая физика. Гидродинамика, стр. 472). И далее в том же параграфе (стр. 476): "К происхождению неустойчивости ударных волн ... можно подойти ..., рассмотрев отражение от поверхности разрыва звука, падающего на нее со стороны сжатого газа. Поскольку ударная волна движется относительно газа впереди нее со сверхзвуковой скоростью, то в этот газ звук не проникает. В газе же позади волны будем иметь, наряду с падающей звуковой волной, еще и отраженную звуковую и энтропийно-вихревую волны (а на самой поверхности разрыва возникает рябь(аналог волны Маренгони(см. [14])). Задача об определении коэффициента отражения по своей постановке близка к задаче об исследовании устойчивости."Какой можно сделать вывод—на начальной стадии турбулентности образуется два типа возмущения, с разными скоростями перемещения по газу(звуковые со скоростью звука и энтропийно-вихревые со скоростью потока газа), что позволяет выдвинуть гипотезу существования на мезоструктурном уровне двухскоростной гидродинамики, когда разные части газа(инертная часть и флуктуации уплотнений) обладают разными скоростями относительно неподвижного газа, разными коэффициентами переноса, если рассматривать поток этих флуктуаций, обусловленный градиентом их плотностей.

Как видим, эти факты дают экспериментальное обоснование пункта 1). Как отмечается Николис Г., Пригожиным И. [18]—возникновение двухскоростного пото-

ка(двух типов возмущений, с разными скоростями перемещения по газу) можно назвать катастрофой Римана-Гюгонио(Николис, Пригожин. Стр.189).

Далее, то, что энтропийно-вихревые возмущения могут рассматриваться как флуктуации плотности может быть обосновано соответствующим законом сохранения-законом сохранения циркуляции скорости(теорема Томпсона). Там же в Николис, Пригожин [18], разделе 8.4. , стр. 187, отмечается что возникновение двух-скоростного потока можно интерпретировать, как: «переходы при множественных стационарных состояниях по закону "все или ничего"и теория катастроф». Эти факты дают экспериментальное обоснование пункта 5) о переходах вандерваальсовского типа.

Для пояснения напомним, что любое сложное пространственное распределение скорости можно представить в виде суперпозиции гармонических колебаний. В турбулентном потоке длина волны крупномасштабных колебаний сопоставима с характерным линейным размером задачи. Длина волны наиболее мелкомасштабных колебаний намного меньше характерных размеров задачи и, что самое главное, уменьшается по мере роста числа Рейнольдса. Поэтому в рассматриваемой суперпозиции(т.е. в спектре турбулентности) представлено очень большое число колебаний, длина волн которых сильно варьируется. Крупномасштабные колебания определяют энергия турбулентности, а мелкомасштабные-ее диссипацию, которая оказывается существенной при всех числах Рейнолдса(т.е. при любой сколь угодно малой вязкости).

Описанная структура потока характерна для многих задач гидродинамики. В теории турбулентности фундаментальную роль играют диссипация энергии $\langle \varepsilon \rangle$ и скалярная диссипация $\langle N \rangle$:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \overline{\nu (\partial_{x_i} u'_j - \partial_{x_j} u'_i)^2}, \quad \langle N \rangle = \overline{|\nabla z|^2} \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu (\partial_{x_i} u'_j - \partial_{x_j} u'_i)^2 = \nu |\omega|^2 + 2\nu \partial_{x_i} u'_j \partial_{x_j} u'_i, \quad u' = u - \bar{u}.$$

Здесь u_i — актуальная скорость; чертой сверху обозначено осредненное ее значение; штрихом -пульсационная скорость; D, ν — коэффициенты диффузии и кинематической вязкости, x радиус вектор точки в декартовой прямоугольной системе координат, $\omega = \nabla \cdot u'$ — вектор вихря (завихренность), z — концентрация инертной примеси (т. е. примеси, не участвующей в химической реакции). По повторяющимся индексам производится суммирование, а угловые скобки означают осреднение. Подобно тому, как ε характеризует уменьшение энергии турбулентности из-за вяз-

кости, скалярная диссипация N описывает, с какой скоростью происходит выравнивание неосредненных концентрационных неоднородностей из-за молекулярной диффузии. Следует отметить, что скалярная диссипация и диссипация энергии не зависят от коэффициентов молекулярного переноса и в ламинарном пограничном слое смешения между двумя плоскопараллельными потоками. Увеличение числа Рейнольдса приводит к уменьшению толщины пограничного слоя и соответствующему возрастанию градиентов скорости и концентрации. В результате (см. [19]) величины ε и N остаются в точности неизменными. Такая картина течения наблюдается только внутри узкого пограничного слоя (толщина слоя стремится к нулю при увеличении числа Рейнольдса), вне которого процессы молекулярного переноса несущественны, т.е. $\varepsilon = N = 0$, а характеристики потока описываются уравнениями Эйлера (в ряде случаев можно использовать предположение о потенциальности течения). Описанная структура потока характерна для многих задач гидродинамики, в том смысле, что при больших числах Рейнольдса силы вязкости существенны лишь в очень узких областях, вне которых процессы молекулярного переноса не играют роли, что определяет перемежаемость областей где силы вязкости существенны и где процессы молекулярного переноса не играют роли.

Аналогичная структура перемежаемости наблюдается и в турбулентном потоке. В этом случае процессы диссипации также происходят лишь в узких областях. Особенности турбулентного течения проявляются в том, что эти области хаотически перемещаются в пространстве, а значит $\langle \varepsilon \rangle$ и $\langle N \rangle$, вообще говоря, зависят от числа Рейнольдса. Согласно теории Колмогорова-Обухова [2] пространственный масштаб наиболее мелкомасштабных движений, так называемый колмогоровский или внутренний масштаб турбулентности $\eta = \nu^{3/4} \langle \varepsilon \rangle^{-1/4}$. Описанное явление впервые обнаружено Корсиным [3], [20] и обычно называется перемежаемостью (полосчатостью). В настоящее время установлено, что оно характерно для всех турбулентных течений. Экспериментальные данные и результаты их теоретического анализа указывают на то, что **количественное определение характеристик перемежаемости связано с рядом принципиальных трудностей.**

О ВОЗМОЖНОСТИ РАСШИРЕНИЯ ПОДХОДА КАНА И ХИЛЛАРДА НА РЕШЕНИЕ РЯДА ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ.

Эта статья-вторая из триптиха-кристаллизация [23], турбулентность и горение. Притом, первые два фактора нас интересуют в той специфике, которая связана с реконструкцией начальной стадии турбулентного диффузионного горения [3].

При реконструкции начальной стадии кристаллизации бинарных сплавов за базу [23], описывающую процесс на макроуровне, мы взяли классическую модель механики сплошных сред-модель Био насыщенной пористой среды и для описания производства флуктуаций плотности использовали механизм диффузионного расслоения [31, 8, 9], что соответствует экспериментальным свойствам кристаллизации [7].

Как мы отмечали выше, существующие формы моделирования турбулентности отражают две крайности-волновую(вibrационная гидродинамика) и, наиболее распространенную, диффузионную(статистическая) теория турбулентности. Наша задача, построить реконструкцию начальной стадии турбулентности, промежуточную для этих двух крайностей, согласующую волновой и диффузионный характер турбулентности, и дать возможное объяснение зарождения двухскоростного режима и перемежаемости. Для для реконструкции зарождения двухскоростного режима, как базу макро уровня(для описания волновых свойств процесса), мы используем классическую модель механики сплошных сред-регуляризацию вязкостью одной из хорошо известных форм системы Эйлера (2) для смеси [21, 22], когда задана концентрация примеси. Таким образом, для описания визуализации в гиперзвуковом потоке газа начальной стадии образования флуктуации плотности концентрации c с разными скоростями, соответственно скорости газа и флуктуаций плотности(вихрей), мы используем три уравнения макро уровня: уравнения двухскоростной системы Эйлера-уравнение неразрывности для суммарной плотности и средней скорости и уравнения для импульсов газа и вихрей. Стандартно введя механизм, действующим в зоне ударной волны, вязкость, получим уравнения

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho U) &= \varepsilon \partial_x^2 \rho, \\ \partial_t((1-c)\rho u_1) + \partial_x((1-c)\rho u_1^2 + P(c, \rho)) &= \varepsilon \partial_x^2 u_1, \\ \partial_t(c\rho u_2) + \partial_x(c\rho u_2^2 + P(c, \rho)) &= \varepsilon \partial_x^2 u_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\rho_2 = c\rho$ плотность флуктуаций, $\rho_1 = (1-c)\rho$ -плотность инертной части газа и $P(c, \rho)$ - давление.

Для описания производства флуктуаций плотности также как в [23] использовали механизм диффузионного расслоения- кинетическое уравнение (3) (для описания диффузионных свойств процесса). Мы применим расширение [34, 35, 23] подхода Кана и Хилларда [8, 9] на решение задач газовой динамики. Четвертое уравнение реконструкции- кинетическое уравнение мезо-уровня, для флуктуаций плотно-

сти:

$$\partial_t(c\rho) + \partial_x(c\rho u_2) = \rho K(c, T), \quad (3)$$

где $K(c, T)$ – производство флуктуаций (кинетическое уравнение для флуктуаций), T – температура. Явление диффузионного расслоения в зоне ударной волны моделируются при помощи производства флуктуаций плотности в уравнении (3) в форме кобобщенного химического потенциала (уравнения Кана-Хилларда [8, 9])

$$K(c, T) = \partial_x \left(\frac{D}{T} \partial_x \mu \right) \quad (4)$$

Здесь D – коэффициент макро диффузии, обобщенный химический потенциал

$$\mu = \Phi'_c(c, T) - \varepsilon^2 \partial_x^2 c \quad (5)$$

При этом коэффициент диффузии, как производная химического потенциала по составу, может в определенном интервале составов принимать отрицательные значения (котрицательная или квосходящая диффузия). Потенциал Ван-дер-Ваальса $\Phi'_c(c, T) = 4(c - c^+)(c - c_{cr})(c - c^-)$, c^\pm и c_{cr} – заданные параметры, зависящие от температуры так, что $c^\pm, c_{cr} \in (0, 1)$, с симметричным потенциалом $\Phi(c) = (c - c^+)^2(c - c^-)^2$, когда $2c_{cr} = c^+ + c^-$.

Что, в этом случае, позволило выдвинуть такую гипотезу механизма, действующего в зоне ударной волны?

Процесс горения однородной смеси в турбулентном потоке обычно анализируется с позиции так называемой "поверхностной" модели, т.е. предполагается, что горение происходит в тонких фронтах пламени. Турбулентные пульсации, искривляя фронт пламени, увеличивают его поверхность, а движение фронта пламени по нормали со скоростью нормального распространения пламени u_n приводит к уменьшению площади этой поверхности. Этот процесс должен очевидно, характеризоваться двумя параметрами: пульсационной скоростью u' и величиной u_n . При одинаковых значениях u_n и u' скорость турбулентного распространения пламени u_T в "богатых" и "бедных" смесях оказывается существенно различной. В литературе [37,38] отмечается, что при одинаковых значениях скорости нормального распространения пламени u_n в богатых смесях водорода и метана с воздухом величина u_n ниже, чем у бедных. У пропано-воздушных смесей наблюдается противоположная картина. Отмеченное обстоятельство естественно связать с поведением эффективного коэффициента молекулярного переноса при изменении состава

смеси. В связи с этим напомним, что при увеличении коэффициента α избытка воздуха эффективный коэффициент молекулярного переноса $a(\alpha)$ в первом случае уменьшается, а во втором возрастает. Такой эффект обусловлен **ДИФФУЗИОННЫМ РАССЛОЕНИЕМ**, т.е. **неравенством коэффициентов диффузии окислителя и горючего**.

Наличие диффузионного расслоения особенно наглядно демонстрируется в приближении сильного разбавления [41], когда смеси в большом количестве находится инертное вещество. Это приближение с хорошей точностью пригодно при анализе процессов горения углеводородных горючих в воздухе, когда содержание азота в смеси достаточно велико (порядка 80 процентов). В [40] доказано наличие диффузионное расслоение в сферически симметричном случае.

Качественные соображения о том, что диффузионное расслоение может существенно влиять на скорость распространения пламени в **развитом турбулентном потоке**, содержится в работе [39]. На первый взгляд такие представления кажутся мало правдоподобными, так как хорошо известно, что структура развития турбулентности и процессы турбулентного переноса практически не зависят от числа Рейнольдса и Пекле. **ОДНАКО** следует иметь в виду, что в турбулентном потоке горение происходит в узких зонах сильно искривленных турбулентными пульсациями. При увеличении числа Рейнольдса появляются все более мелкие вихри, которые должны все сильнее и сильнее искривлять фронт пламени и тем самым увеличивать диффузионное расслоение. Не смотря на то, что механизм этого явления в турбулентном потоке не вполне ясен, полученные значения эффективного коэффициента молекулярного переноса позволяют обобщать данные измерений скорости турбулентного распространения пламени u_T в турбулентных потоках разных газов. В качестве примера приведем результаты обработки данных [38], которые получены при измерении u_T в сферической бомбе. Турбулентность создавалась вращением мешалок, расположенных на стенке бомбы. Использовались смеси водорода, метана и пропана с воздухом.

Процесс горения однородной смеси в турбулентном потоке обычно анализируется с позиции так называемой "поверхностной" модели, т.е. предполагается, что горение происходит в тонких фронтах пламени. Турбулентные пульсации, искривляя фронт пламени, увеличивают его поверхность, а движение фронта пламени по нормали со скоростью нормального распространения пламени u_n приводит к уменьшению площади этой поверхности. Этот процесс должен очевидно, характеризоваться двумя параметрами: пульсационной скоростью u' и величиной u_n . При

одинаковых значениях u_n и u' скорость турбулентного распространения пламени u_T в "богатых" и "бедных" смесях оказывается существенно различной. Для объяснения этого факта в работе [40] сделано предположение, что величина u_T также должна зависеть от толщины δ ламинарного фронта пламени. Эту зависимость удобно характеризовать с помощью эффективного коэффициента молекулярного переноса a , определяемого как δu_n . Величина a находится путем обработки опытных данных, в которых измерялись минимальная энергия искрового воспламенения, критический градиент скорости при проскоке пламени, гасящий диаметр и т.д. Расположение экспериментальных точек (для водорода, метана, пропана) вокруг единой кривой свидетельствуют о том, что диффузионное расслоение при горении в турбулентном потоке можно хорошо описать с помощью введенного коэффициента молекулярного переноса.

Предложенная гипотеза механизма, действующего в зоне ударной волны, опирается на предположение, что существенную роль в формировании флуктуаций плотности играют диффузионное расслоение и возникновение двухскоростного режима (катастрофа Римана-Гюгонио). Реконструкция этих базовых свойств потока, диффузионной и волновой характеристик потока и их согласование, станет предметом наших исследований. Как мы покажем ниже, возникновение двухскоростного режима (катастрофа Римана-Гюгонио) связано с потерей строгой гиперболичности многоскоростной системы Эйлера (волновая природа процесса), в то время как эффект рождения перемежаемости связан с предположением о существенной роли в формировании флуктуаций плотности диффузионного расслоения (диффузионная природа процесса). Последнее вводится кинетическим уравнением производства флуктуаций плотности. Потенциал Φ определяется спинодалями $c^\pm(T)$, существование которых следует из утверждения Пригожина, что возникновение двухскоростного потока можно интерпретировать, как: "переходы при множественных стационарных состояниях по закону "все или ничего" и теория катастроф" и определяются экспериментом.

Суммарно (2), (3) дают нестандартную регуляризацию [5] классической системы уравнений Эйлера (6) [21, 22]

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho U) &= 0 \\ \partial_t((1-c)\rho u_1) + \partial_x((1-c)\rho u_1^2 + P(c, \rho)) &= 0, \\ \partial_t(c\rho u_2) + \partial_x(c\rho u_2^2 + P(c, \rho)) &= 0, \\ \partial_t(c\rho) + \partial_x(c\rho u_2) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В чем нестандартность регуляризации (2), (3)? Для этих целей мы прежде всего

в системе (6) перейдем к новым переменным (c, ρ, U, u_2) , в которых система (6) примет следующий вид

$$\begin{aligned} \partial_t c + U \partial_x c - \partial_x (c(U - u_2) - c(U - u_2) \rho^{-1} \partial_x \rho) &= 0, \\ \partial_t \rho + \partial_x (\rho U) &= 0, \\ \partial_t (\rho U) + \partial_x (\rho U^2 + 2P(c, \rho)) + \partial_x \left(\frac{c}{1-c} \rho (U - u_2)^2 \right) &= 0, \\ \partial_t (c \rho u_2) + \partial_x (c \rho u_2^2 + P(c, \rho)) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

Систему (7) будем называть приведенной системой Эйлера. Ее регуляризация (2), (3) запишется в виде

$$\begin{aligned} \partial_t c + U \partial_x c - \partial_x (c(U - u_2) - c(U - u_2) \rho^{-1} \partial_x \rho) &= K(c, T), \\ \partial_t \rho + \partial_x (\rho U) &= \varepsilon \partial_x^2 \rho, \\ \partial_t (\rho U) + \partial_x (\rho U^2 + 2P(c, \rho)) + \partial_x \left(\frac{c}{1-c} \rho (U - u_2)^2 \right) &= \varepsilon \partial_x^2 U, \\ \partial_t (c \rho u_2) + \partial_x (c \rho u_2^2 + P(c, \rho)) &= \varepsilon \partial_x^2 u_2, \end{aligned} \quad (8)$$

В дальнейшем, для простоты, мы рассмотрим изотермический случай, когда $T = const$, и случай $T = P/\kappa\rho$ — температура совершенного газа. Что общего с классикой, что нет: 1) нестандартность определения слабого решения для приведенной системы Эйлера связана с тем, что первое уравнение умножаем на тестовую функцию $c(x, t) \varphi(x, t)$, где $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(R^2)$ -бесконечно дифференцируемая функция в R^2 , с компактным носителем, в то время как три уравнения для усредненной плотности, U и u_2 стандартно умножаем на тестовые функции $\psi_j(x, t) \in C_0^\infty(R^2)$, $j = 1, 2, 3$, соответственно; 2) есть четыре семейства волн разряжения и четыре семейства устойчивых ударных волн (см. [5]), три семейства устойчивых ударных волн (8) есть поднятие устойчивых ударных волн усеченной системы Эйлера. Система (2), (3) является регуляризацией в смысле приведенного выше определения слабого решения, поскольку правая часть—интегралы

$$\int_{R_+^2} \varepsilon \partial_x \rho \partial_x \psi_1(x, t) dx dt, \int_{R_+^2} \varepsilon \partial_x U \partial_x \psi_2(x, t) dx dt, \int_{R_+^2} \varepsilon \partial_x u_2 \partial_x \psi_3(x, t) dx dt \Rightarrow 0,$$

и

$$\int_{R_+^2} \frac{D}{T} \partial_x \mu \partial_x (c(x, t) \varphi(x, t)) dx dt \Rightarrow 0.$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

На основе, приведенной выше нестандартной регуляризации системы (7) уравнений Эйлера с использованием вязкости и введения отрицательной диффузии, мы

приведем визуализацию самовозбуждающихся режимов для сверхзвукового потока, с достаточно большим числом Маха. Хорошо известно что система уравнений Эйлера имеет много решений. А нет ли среди них решений, естественно отличных от вязких, которые обладали бы свойствами дальнего действия и самовозбуждения и как их выделить?

КАТАСТРОФА РИМАНА-ГЮГОНИО. Начнем с первого пункта: 1) двухскоростное течение(катастрофа Римана-Гюгонио), реконструкции базовых свойств начальной стадии турбуленизации.

Что общего в задаче Римана для приведенной системой Эйлера с классикой, что нет? Есть четыре семейства волн разряжения и четыре семейства устойчивых ударных волн(см. [5],[6]). Три семейства устойчивых ударных волн (4.3) есть поднятие устойчивых ударных волн усеченной системы Эйлера

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho U) &= 0, \\ \partial_t(\rho U) + \partial_x(\rho U^2 + 2P(c, \rho)) + \partial_x\left(\frac{c}{1-c}\rho(U - u_2)^2\right) &= 0, \\ \partial_t(c\rho u_2) + \partial_x(c\rho u_2^2 + P(c, \rho)) &= 0,\end{aligned}\tag{9}$$

Чем интересна усеченная система Эйлера (9) ? Система (9) дает пример нестро-го гиперболической системы законов сохранения, для которых на критическом многообразии(кратных собственных значений) нет полного базиса собственных векторов, есть присоединенный вектор. Построенные ниже бифуркации критических ударных волн дают ответ на давно поставленную Лаксом задачу о том, что происходит с ударной волной, при прохождении ею в фазовом пространстве критического многообразия. Процесс остается волновым. В фазовой плоскости переменных (ρ, U, u_2) выделяется множество точек, не достижимых цепочками устойчивых ударных волн и волн разряжения. Вход в это множество приводит к появлению бифуркации фронта ударной волны компоненты u_2 . При любом фиксированном $c \in (0, 1)$ при специальном подборе начальных данных [5],[6] можно получить неклассическое решение задачи Римана, с бифуркацией фронта ударной волны компоненты в два фронта, когда для переднего фронта выполнено условие Гюгонио, в то время как для заднего фронта уравнение для скорости имеет другой характер. Численно такая бифуркация однофронтного решения для упрощенной усеченной системы

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \partial_x(\rho U) &= 0, \\ \partial_t(\rho U) + \partial_x(\rho U^2 + 2P(c, \rho)) &= 0, \\ \partial_t(c\rho u_2) + \partial_x(c\rho u_2^2 + P(c, \rho)) &= 0,\end{aligned}\tag{10}$$

без члена $\partial_x(\frac{c}{1-c}\rho(U - u_2)^2)$ во втором уравнении (9), получена в [5]. Ниже, мы приводим результаты численного моделирования, приведенного в [24]. Рисунок ниже(Рис1b)–укрупнение динамики бифуркации фронта устойчивой ударной волны скорости второй компоненты u_2 :

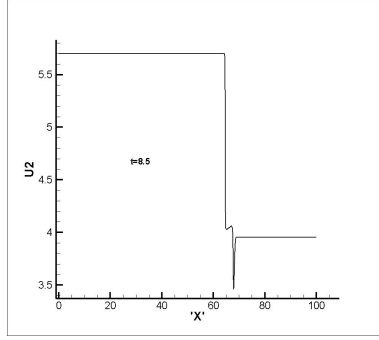


Рис.1а

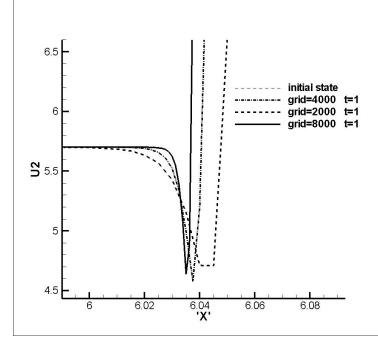


Рис.1b

Как показало численное моделирование [24], в фазовой плоскости переменных выделяется множество точек, не достижимых цепочками устойчивых ударных волн и волн разряжения. Вход в это множество приводит к появлению бифуркации фронта ударной волны компоненты . При любом фиксированном при специальном подборе начальных данных можно получить неклассическое решение задачи Римана(так называемый горбатый кинк), которое представляет катастрофу Римана-Гюгонио. Полученные бифуркации, типа многогорбых кинков, имеют сверхзвуковой характер, связанный с критической скоростью $\omega_{cr} = \sqrt{\frac{4[P]}{c[\rho]}}$, большей скорости звука. В общем случае, для полной усеченной системы (9), бифуркации фронта ударной волны усредненной скорости U и усредненной плотности ρ имеют тот же профиль(ближайшая публикация).

СОГЛАСОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ. Теперь перейдем к реконструкции пункта 4) базовых свойств начальной стадии турбулентности, а именно: согласование катастрофы Римана-Гюгонио и неустойчивостей, порождающих образование флуктуаций плотности. При исследовании усеченной модели Эйлера мы получили семейства бифуркаций верхнего и нижнего критический решений, определяемые, при фиксированном значении ω , выбором либо значения второй скорости $\omega_1 \in (0, \omega)$, либо начальной амплитуды ударной волны флуктуаций-значения a_0^+ (см. [5], [23]). Эта многозначность связана с тем, что мы не описали неустойчивость, рождающую всплеск (a_0^+) в стадии зарождения бифуркации для

усеченной системы Эйлера. Из численного моделирования (см. [24]) следует, что в полной приведенной системе это можно отнести на счет неустойчивости константы c_0 в данных Коши концентрации c активной компоненты из области лабильности уравнения Кана-Хилларда (Рис.2а):

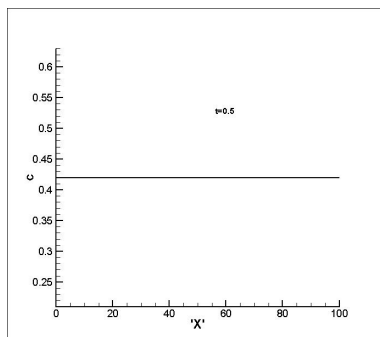


Рис.2а

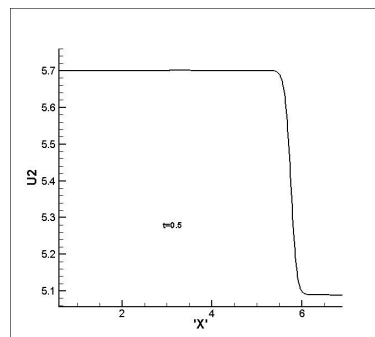


Рис.2б

Начальный всплеск (Рис.3а) определяется уравнением для концентрации в приведенной системе

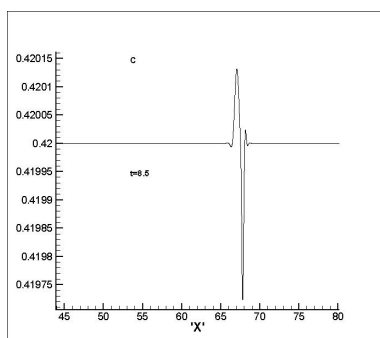


Рис.3а

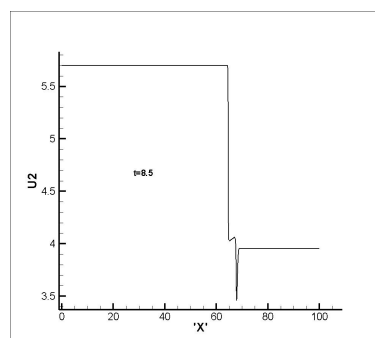


Рис.3б

и согласуется с всплеском бифуркации устойчивой однофронтной волны u_2 (Рис.3б)

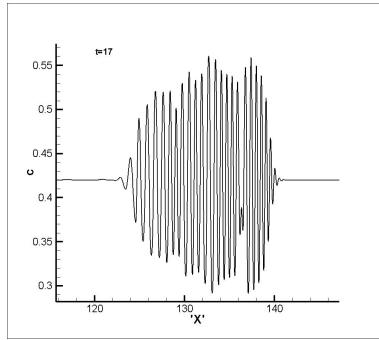


Рис.4а

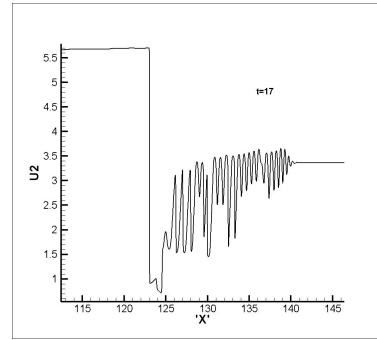


Рис.4б

Возникающий промежуток между передним и задним фронтами ударной волны для u_2 заполняется осцилляциями самовозбуждающегося решения (Рис4б). В общем случае, для полной усеченной системы (9), бифуркации фронта ударной волны усредненной скорости U и усредненной плотности ρ имеют тот же профиль

ПЕРЕЖЕЖАЕМОСТЬ. Как видим, диссипация энергии ε проходит в зоне бифуркации, между фронтами флуктуации скорости u_2 . Процессы диссипации происходят лишь в узких областях, что соответствует определению перемежанности (полосчатости) течения. Этот факт подтверждает утверждение 4) списка базовых свойств внутренней турбулентности.

В силу приведенного выше определения слабого решения предельный переход при $[c] \rightarrow 0$ трех семейств ударных волн, определяемых устойчивыми ударными волнами усеченной системы Эйлера, дает три семейства устойчивых ударных волн, для которых первое приближение $c = c_0 = const$ и (ρ, U, u_2) — решение усеченной системы Эйлера. Регуляризация (8) для многокомпонентной системы уравнений Эйлера, позволяет выделить в ней НЕВЯЗКИЕ решения, описывающие процессы с избыточной энергией (в мезомасштабе), которые прежде всего характеризуются дальнодействием и самовозбуждающимися режимами (пример коагуляции, начальной стадии кристаллизации сплавов). Нестандартным регуляризациям классических моделей механики сплошных сред, встречались и ранее (см. [14]).

О ПРИРОДЕ БИФУРКАЦИЙ ОДНОСКОРОСТНЫХ (ОДНОФРОНТОВЫХ) РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РИМАНА УСЕЧЕННОЙ СИСТЕМЫ ЭЙЛЕРА) Как мы отмечали выше, основу "странного" поведения решений регуляризации (8) составляют бифуркации

односкоростных(однофронтowych) решений усеченной системы Эйлера в двух-скоростные(двухфронтowych) решения. В статье [6], для упрощенной усеченной системы Эйлера (9), приведены результаты, аналитически доказывающие существование бифуркаций односкоростных решений в двухскоростные решения. Перейдем к исследованию условий существования двухфронтowych решений усеченной системы Эйлера. Пусть . Рассмотрим упрощенную усеченную систему

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) &= 0, \\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x(\varrho U^2 + 2P(c, \varrho)) &= 0, \\ \partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x(c\varrho u_2^2 + P(c, \varrho)) &= 0,\end{aligned}\tag{11}$$

и задачу Римана для $V = (\varrho, U, u_2)^T$ системы (11), т.е. задачу Коши с начальными условиями

$$V|_{t=0} = \begin{cases} V_-, & x < 0, \\ V_+, & x > 0 \end{cases}$$

Ее регуляризация вязкостью имеет вид

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) &= \varepsilon \partial_x^2 \varrho, \\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x(\varrho U^2 + 2P(c, \varrho)) &= \varepsilon \partial_x^2 U, \\ \partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x(c\varrho u_2^2 + P(c, \varrho)) &= \varepsilon \partial_x^2 u_2,\end{aligned}\tag{12}$$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия знаков:

$$[\varrho] < 0, [U] < 0, [u_2] < 0,\tag{13}$$

а также имеет место уравнение состояния

$$P(\varrho) = P_0 \varrho^\gamma,\tag{14}$$

где $P_0 > 0, \gamma > 1$ -заданные константы. Кроме того, будем предполагать, что имеет место неравенство

$$0 < \omega_1 < \omega.\tag{15}$$

Алгебраическое исследование. Перепишем систему (11) в форме Коши:

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + U \partial_x \varrho + \varrho \partial_x U = 0, \\ \partial_t U + \frac{2P'}{\varrho} \partial_x \varrho + U \partial_x U = 0, \\ \partial_t u_2 + \frac{c_0 u_2 (u_2 - U) + P'}{c_0 \varrho} \partial_x \varrho - u_2 \partial_x U + 2u_2 \partial_x u_2 = 0, \end{cases}$$

что можно записать в матричном виде:

$$\partial_t V + \mathcal{A} \partial_x V = \varepsilon \partial_x^2 V,\tag{16}$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} U & \varrho & 0 \\ \frac{2P'}{\varrho} & U & 0 \\ \frac{c_0 u_2 (u_2 - U) + P'}{c_0 \varrho} & -u_2 & 2u_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы имеют вид

$$\lambda_{\pm} = U \pm \sqrt{2P'}, \quad \lambda_3 = 2u_2 \quad (17)$$

и при $\varrho > 0$ нарушение строгой гиперболичности происходит на гиперповерхностях

$$\Sigma_{\pm} = \{(\varrho, U, u_2) | 2u_2 = U \pm \sqrt{2P'}\}.$$

Будем рассматривать окрестность гиперповерхности Σ_+ (для Σ_- все аналогично). Обозначим

$$\mathcal{A}_{\pm} = \mathcal{A} - \lambda_{\pm} E.$$

Тогда на критической поверхности Σ_+ имеем

$$\mathcal{A}_{\pm}|_{\Sigma_+} = \begin{pmatrix} \mp \sqrt{2P'} & \varrho & 0 \\ \frac{2P'}{\varrho} & \mp \sqrt{2P'} & 0 \\ \frac{c_0 u_2 (\sqrt{2P'} - u_2) + P'}{c_0 \varrho} & -u_2 & \sqrt{2P'} \mp \sqrt{2P'} \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $\mathcal{A}_+|_{\Sigma_+}$ получаем, что если выполнено условие жордановости

$$c_0 u_2^2 - P' \neq 0, \quad (18)$$

то ранг матрицы $\mathcal{A}_+|_{\Sigma_+}$ равен двум, т.е. λ_+ соответствует жорданова клетка размера 2. Соответствующий собственный вектор $\nu = (0, 0, 1)^T$ будем называть критическим. Для матрицы \mathcal{A}_- собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению, имеет вид

$$\nu_- = (\varrho, -\sqrt{2P'}, \alpha_-)^T,$$

где

$$\alpha_- = -u_2 + \frac{u_2^2}{2\sqrt{2P'}} - \frac{\sqrt{2P'}}{4c_0}.$$

Нетрудно показать (см. [5]), что проекция множества нарушения строгой гиперболичности Σ_+ на плоскость переменных (U, u_2) разделяет плоскость переменных (U, u_2) на две открытые части. Отсюда следует несправедливость теоремы А. Майда [26] для усеченной системы Эйлера (11).

Устойчивые ударные волны. Решения системы (12) будем искать в виде бегущих волн. Для случая, когда решение имеет один общий фронт, положим

$$\begin{aligned}\varrho &= \varrho\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \quad U = U\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \\ u_2 &= u_2\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right).\end{aligned}\tag{19}$$

Для случая двухфронтного решения положим

$$\begin{aligned}\varrho &= \varrho\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \quad U = U\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \\ u_2 &= a\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right) + b\left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon}\right).\end{aligned}\tag{20}$$

Обозначим также

$$\dot{x}^*(t) = \omega, \quad \dot{x}_1(t) = \omega_1.$$

Потребуем, чтобы для однофронтных решений имело место условие стабилизации:

$$\begin{aligned}\varrho(\pm\infty) &= \varrho_{\pm}, \quad U(\pm\infty) = U_{\pm}, \quad u_2(\pm\infty) = u_{2,\pm}, \\ \dot{\varrho}(\pm\infty) &= 0, \quad \dot{U}(\pm\infty) = 0, \quad \dot{u}_2(\pm\infty) = 0.\end{aligned}\tag{21}$$

Для двухфронтных решений условие стабилизации имеет вид

$$\begin{aligned}\varrho(\pm\infty) &= \varrho_{\pm}, \quad U(\pm\infty) = U_{\pm}, \quad a(-\infty) = u_{2,-}, \\ b(-\infty) &= 0, \quad (a + b)(+\infty) = u_{2,+}\end{aligned}\tag{22}$$

После подстановки вида однофронтного решения (21) в (12) получаем систему ОДУ

$$\begin{cases} -\omega(\varrho - \varrho_-) + (\varrho U - \varrho_- U_-) = \dot{\varrho}, \\ -\omega(\varrho U - \varrho_- U_-) + (\varrho U^2 - \varrho_- U_-^2 + 2(P - P_-)) = \dot{U}, \\ -\omega(\varrho u_2 - \varrho_- u_{2,-}) + c_0(\varrho u_2^2 - \varrho_- u_{2,-}^2 + P - P_-) = \dot{u}_2. \end{cases}\tag{23}$$

Проинтегрировав эту систему по x и воспользовавшись условиями стабилизации (21), получаем условия Рэнкина-Гюгонио для однофронтного случая:

$$\begin{cases} -\omega[\varrho] + [\varrho U] = 0, \\ -\omega[\varrho U] + [\varrho U^2 + 2P] = 0, \\ -\omega[c_0 \varrho u_2] + [c_0 \varrho u_2^2 + P] = 0. \end{cases}\tag{24}$$

Заметим, что регуляризованная система (12) допускает факторизацию: первые два уравнения этой системы не содержат неизвестной функции u_2 . После подстановки явного вида двухфронтного решения соответствующая первым двум

уравнениям (12) система ОДУ имеет вид

$$\begin{cases} -\omega\dot{\rho} + (\rho U) = \ddot{\rho}, \\ -\omega(\rho U) + (\rho U^2 + 2P) = \ddot{U}. \end{cases} \quad (25)$$

Рассмотрим теперь ОДУ, соответствующее третьему уравнению системы (12). После подстановки вида двухфронтного решения (20) получаем:

$$-\omega c_0(\dot{\rho}(a+b) + \rho\dot{a}) - \omega_1 c_0 \rho \dot{b} + (c_0 \rho(a+b)^2 + P) = (a+b)\ddot{\rho}.$$

После перегруппировки это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & -\omega c_0(\rho\dot{a}) - \omega_1 c_0(\rho\dot{b}) + \\ & + (\omega_1 - \omega)c_0\rho\dot{b} + (c_0\rho(a+b)^2 + P) = (a+b)\ddot{\rho}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично тому, как было получено условие Рэнкина-Гюгонио для однофронтного решения, получим:

$$\begin{cases} -\omega[\rho] + [\rho U] = 0, \\ -\omega[\rho U] + [\rho U^2 + 2P] = 0, \\ -\omega[\rho u_2] + (\omega - \omega_1)[b]\rho_- + [\rho u_2^2 + \frac{P}{c_0}] = 0. \end{cases} \quad (27)$$

При этом в последнем уравнении мы воспользовались равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\rho}(\tau)b(\tau)d\tau = [b]\rho_-,$$

которое имеет место при условии (13).

Бифуркации критических однофронтных решений. В этом разделе мы приведем построение бифуркаций однофронтного решения в двухфронтное как возмущение критических однофронтных решений усеченной системы. Бифуркация реализуется распадом решения на две бегущих волны. Каков сценарий бифуркации? Задача этого параграфа-найти условия бифуркации однофронтного решения в двухфронтное, т.е. природу разветвления фронта ударной волны. Мы покажем ниже, что бифуркация возникает как возмущение критических решений $(\rho^{cr}, U^{cr}, u_2^{cr})$, исследованных выше. Система (refreg2cut) факторизуется, поэтому исследуем сначала первые два уравнения

$$\begin{aligned} & -\omega(\rho - \rho_-) + \rho U - \rho_- U_- = \dot{\rho}, \\ & -\omega(\rho U - \rho_- U_-) + \rho U^2 - \rho_- U_-^2 + 2(P - P_-) = \dot{U} \end{aligned} \quad (28)$$

Определим условия Лакса, при которых есть сепаратрисное решение, т.е. существует пара (ϱ, U) , монотонных функций, являющаяся решением системы ОДУ (28) и удовлетворяющая условиям стабилизации

$$\begin{aligned}\varrho(\pm\infty; t) &= \varrho_{\pm}(t), \quad U(\pm\infty; t) = U_{\pm}(t), \\ \dot{\varrho}(\pm\infty; t) &= 0, \quad \dot{U}(\pm\infty; t) = 0.\end{aligned}\tag{29}$$

с условиями Гюгонио

$$\begin{aligned}-\omega[\varrho] + [\varrho U] &= 0, \\ -\omega[\varrho U] + [\varrho U^2] &= 0\end{aligned}\tag{30}$$

где $\omega = \dot{x}^*$. Из условий Гюгонио получаем

$$\omega = \frac{[\varrho U]}{[\varrho]} = U_- + \varrho_+ \frac{[U]}{[\varrho]}$$

В дальнейшем рассматриваем случай, когда $[\varrho] < 0$, $[U] < 0$. Как мы установили выше, собственные значения усеченной системы

$$\lambda_1(\tau) = U - \sqrt{P'}, \quad \lambda_2(\tau) = U + \sqrt{P'}, \quad \lambda_3(\tau) = 2u_2$$

Положим $\lambda_j^{\pm} = \lambda_j(\pm\infty)$. Теперь сформулируем условие Лакса существования сепаратрисного решения системы (усредненных компонент)

Условие устойчивости Лакса(см. [27].) Пусть для ω выполнено неравенство для ударной волны первого семейства

Условие 0.1 (Условие устойчивости Лакса) Пусть для ω выполнено неравенство для ударной волны первого семейства

$$\begin{aligned}\lambda_1^+ &< \lambda_2^+ < \omega \\ \lambda_1^- &< \omega < \lambda_2^-\end{aligned}\tag{31}$$

которое определяет интервал устойчивых скоростей ω для ОДУ усредненных параметров (ϱ, U) . Условие (31) гарантирует существование стабилизирующегося решения системы ОДУ (28) для усредненных параметров. Приведем условия, когда справедливы эти неравенства для скорости ω , определяемой условием Гюгонио. Если $\varrho, U > 0$, $[\varrho] < 0$, $[U] < 0$ и дополнительно справедливо неравенство

$$\varrho_- - 2\varrho_+ < 0\tag{32}$$

скорость ω , определяемая условиями Гюгонио, удовлетворяет неравенствам (31) условия Лакса для подсистемы первых двух уравнений (23) усредненных компонент. В дальнейшем будем считать ω выбранным условием Гюгонио однофронтной задачи.

Нарушение условия Лакса. Теперь докажем существование двух критических решений системы ОДУ (12). Пусть в фазовом пространстве ось u_2 направлена вверх, перпендикулярно плоскости усредненных переменных (ϱ, U) . Пусть для ω выполнено неравенство для ударной волны первого семейства

$$\begin{aligned}\lambda_1^+ &< \lambda_2^+ < \omega < \lambda_3^+ \\ \lambda_1^- &< \omega < \lambda_2^- < \lambda_3^-\end{aligned}\quad (33)$$

который гарантируют существование стабилизирующегося решения системы ОДУ (12). Здесь возможны два сценария управления устойчивыми ударными волнами (и их регуляризациями) для получения критических решений системы (12). Одно критическое решение, которое назовем верхним, получим управлением левым предельным значением $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^\perp$, находясь выше верхней ветви критического многообразия Σ_+ , уменьшая $u_{2,-}$ до первого выхода на критическое многообразие Σ^+ в точке $(\varrho_+^{cr}, U_+^{cr}, u_{2,+}^{cr})$. Второе критическое решение, которое назовем нижним, получим, если в фазовой плоскости будем управлять левым предельным значением $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^\perp$, находясь ниже верхней ветви критического многообразия Σ_+ , и увеличивая $u_{2,-}$ до первого выхода на критическое многообразие Σ^+ в точке $(\varrho_-^{cr}, U_-^{cr}, u_{2,-}^{cr})$.

Теперь отметим, что при выполнении условий: $\varrho, U > 0$, $[\varrho] < 0$, $[U] < 0$, (32) и

$$\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} > 0, \quad (34)$$

для критического значения управления

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2} \left(\omega + \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} \right)} \right), \quad (35)$$

существует монотонно убывающее стабилизирующееся решение системы (12), для которого $(\varrho_+^{cr}, U_+^{cr}, u_{2,+}^{cr})$ принадлежат верхней ветви критического многообразия Σ_+ , и $u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2}\omega$. Более того, не существует однофронтное монотонно убывающее стабилизирующееся решение системы (12), с теми же компонентами (ϱU) , но для которого $u_{2,-} < u_{2,-}^{cr}$, отвечающего верхнему критическому решению.

Если же выполнены условия: $\varrho, U > 0$, $[\varrho] < 0$, $[U] < 0$, (32) и

$$\frac{4[P]}{c_0[\varrho]} - \omega^2 > 0, \quad (36)$$

для критического значения управления

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2}\omega, \quad (37)$$

существует однофронтное монотонно убывающее стабилизирующееся решение системы (12), для которого левое предельное значение $(\varrho_-^{cr}, U_-^{cr}, u_{2,-}^{cr}) \in \Sigma_+$, и

$$u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2}\left(\omega - \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+} \left(\frac{4[P]}{c_0[\varrho]} - \omega^2\right)}\right)$$

Более того, не существует монотонно убывающее стабилизирующееся решения системы (12), с тем же компонентами (ϱU) , но для которого $u_{2-} > u_{2,-}^{cr}$, отвечающего нижнему критическому решению. Отметим, что условия (36) справедливо, если

$$0 < U_- < \sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}} \left(-1 + \sqrt{\frac{4\varrho_-}{c_0\varrho_+}} \right) \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}$$

О бифуркации верхнего критического решения. Теперь получим бифуркацию типа горбатого кинка, как возмущение верхнего критического решения, существующего при условии

$$\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} > 0, \quad \omega > \omega_1 > 0$$

В чем природа такой бифуркации? Как мы показали выше, верхнее критическое решение, которое мы получаем в фазовой плоскости подходом сверху к критическому многообразию Σ_+ , если ось u_2 направлена вертикально вверх, есть предел существования классической однофронтной ударной волны. Попытка опуститься ниже критического многообразия приводит к распаду классической ударной волны, однофронтной, на две—замедление критического решения и со старой скоростью сброс предвестника, с немонотонным отрицательным профилем типа горбатого кинка. Т.е. мы понижаем правое предельное значение $u_{2,+}$, опуская его ниже критического $u_{2,+}^{cr}$ (переход каустики). Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтных ударных волн. Как видим, это есть реконструкция: «Произвольное возмущение течения складывается из энтропийно-вихревой волны и звуковой волны. ... Возмущение в

целом представляется линейной комбинацией возмущений обоих типов" (Ландау Л.Д. и Лифшицем Е.М.)».

После подстановки вида двухфронтного решения (20) в систему ОДУ (12) для u_2 , вида

$$u_2 = a_0 \left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon} \right) + b_0 \left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon} \right), \quad (38)$$

получаем третье уравнение системы ОДУ двухфронтной задачи Римана:

$$(a_0 + b_0) \dot{} = -\omega c_0 (\varrho a_0 - \varrho_- a_0^-) - \omega_1 c_0 (\varrho b_0 - \varrho_- b_0^-) + \quad (39)$$

$$+ (\omega_1 - \omega) c_0 \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} b_0 ds + c_0 (\varrho (a_0 + b_0)^2 - \varrho (a_0^- + b_0^-)^2 + P - P^-).$$

Потребуем выполнения условия

$$\omega^2 > \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} \quad (40)$$

существования верхнего критического решения. Разложение (38) будем искать как возмущение верхнего критического решения. Для этого положим $b_0(x, t) = u_2^{cr} \left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon} \right)$, где $\dot{x}_1 = \omega_1$, тем самым, ускоряя или замедляя компоненту $u_2^{cr}(\tau)$ — верхнего критического решения ОДУ (12), отвечающего скорости фронта ω . Предельные константы верхнего критического решения:

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2} \left(\omega + \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} \right), \quad u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2} \omega. \quad (41)$$

Тогда для возмущения a_0 получим уравнение

$$\dot{a}_0 = c_0 \varrho (a_0 + 2u_2^{cr} - \omega) a_0 - c_0 (\omega_1 - \omega) (\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}) + \quad (42)$$

$$+ c_0 (\omega_1 - \omega) \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds$$

с условиями стабилизации

$$a_0^- = 0, \quad (\dot{a}_0)^- = (\dot{a}_0)^- = 0$$

В рассматриваемом случае третье условие Гюгонио двухфронтной задачи запишется в виде:

$$\varrho_+ (a_0^+ - \omega) a^+ - \frac{1}{2} (\omega - \omega_1) \varrho_{\pm} \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} = 0.. \quad (43)$$

где плюс или минус в (43) выбираем в зависимости от знака $\omega_1 - \omega$. Здесь мы использовали справедливость соотношения

$$-\omega[\varrho u_2^{cr}] + [\varrho(u_2^{cr})^2] + \frac{1}{c_0}[P] = 0,$$

для критического управления u_2^{cr} . Прежде всего определимся со знаком $\omega_1 - \omega$. Исследование нулевых изоклин уравнения (42):

$$a_{\pm} = \frac{1}{2} \left(- (2u_2^{cr} - \omega) \pm \sqrt{D_a} \right), \quad a_-^- = \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)}, \quad a_-^+ = 0$$

показывает, что для дискриминанта

$$D_a = (2u_2^{cr} - \omega)^2 - \frac{4(\omega_1 - \omega)}{\varrho} \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds + 4(\omega_1 - \omega) \left(u_2^{cr} - \frac{\varrho_-}{\varrho} u_{2,-}^{cr} \right)$$

имеем

$$D_a^- = \frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right),$$

$$D_a^+ = -\frac{4(\omega_1 - \omega)}{\varrho^+} \left(\varrho_- u_{2,-}^{cr} - \varrho_+ u_{2,+}^{cr} + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right) > 0 \text{ (или } = 0)$$

если

$$Z = \omega - \omega_1 > 0 \tag{44}$$

Таким образом, мы замедляем верхнее критическое решение и возмущение a_0 предвестник. Тогда получили следующую спектральную задачу по параметру Z :

$$\dot{a}_0 = c_0 \varrho (a_0 + 2u_2^{cr} - \omega) a_0 + c_0 Z (\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}) - c_0 Z \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \tag{45}$$

$$a_0^- = 0, \quad (\dot{a}_0)^- = (\dot{a}_0)^+ = 0.$$

$$(a_0^+ - \omega) a^+ - \frac{\varrho_-}{2\varrho_+} Z \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} = 0 \tag{46}$$

Задача состоит в нахождении стабилизирующегося решения уравнения (45). Немонотонное стабилизирующееся решение этой задачи назовем одnogорбым кинком, если его график $y = a_-$ стартует из нуля при $\tau = -\infty$ и убывает, находясь между нулевыми изоклинами, до пересечения с нижней изоклиной в точке его минимума. Затем, находясь под нижней изоклиной, возрастает, стабилизируясь к $u_{2,+}^{cr}$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Соответственно, двугорбым кинком назовем немонотонное стабилизирующееся решение этой задачи, график $y = a_-$ которого стартует из нуля при $\tau = -\infty$ и убывает, находясь между нулевыми изоклинами, до пересечения с нижней изоклиной в точке его минимума. Затем, находясь под нижней изоклиной,

возрастает до пересечения с ней в точке его максимума. Далее убывает, находясь между нулевыми изоклинами, и стабилизируется к $u_{2,+}^{cr}$ при $\tau \rightarrow +\infty$. В [27] при выполнении условия (32), оценки (40) и

$$\omega > Z > \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} \quad (47)$$

доказано существование немонотонного решения задачи (4.52), с профилем, типа "одногорбого кинка".

О бифуркации нижнего критического решения. Исследование бифуркации нижнего критического решения аналогично, приведенному выше для верхнего критического решения. Бифуркация однофронтного решения в интервале скоростей

$$\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2 > 0, \quad \omega > \omega_1 > 0$$

рассматривается как возмущения нижнего критического однофронтного решения. В чем природа такой бифуркации? Как мы показали выше, нижнее критическое решение, которое мы получаем в фазовой плоскости подходом снизу к критическому многообразию Σ_+ , если ось u_2 направлена вертикально вверх, есть предел существования классической однофронтной ударной волны. Попытка подняться выше критического многообразия приводит к распаду классической ударной волны, однофронтной, на две—замедленной критической волной и со старой скоростью сброс предвестника. Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтных ударных волн.

КРИТИЧЕСКАЯ ВОЛНА РАЗРЯЖЕНИЯ (см.[27]). Начнем с волн разряжения в области строгой гиперболичности, когда (ϱ, U, u_2) не принадлежит критическому множеству Σ_+ фазового пространства. Из классической теории каждому собственному вектору соответствует волна разряжения. Действительно, будем искать волну разряжения в виде

$$\varrho = \varrho\left(\frac{x}{t}\right), \quad U = U\left(\frac{x}{t}\right), \quad u_2 = u_2\left(\frac{x}{t}\right). \quad (48)$$

Подставляя эти равенства в систему уравнений (11) и обозначая $s = \frac{x}{t}$, а точкой — производную по s , получаем:

$$\begin{cases} -s\dot{\varrho} + (\varrho U)\dot{} = 0, \\ -s(\varrho U)\dot{} + (\varrho U^2 + 2P)\dot{} = 0, \\ -s(\varrho u_2)\dot{} + (\varrho u_2^2 + \frac{1}{c_0}P)\dot{} = 0, \end{cases} \quad (49)$$

Откуда

$$\begin{pmatrix} U - s & \varrho & 0 \\ U^2 - sU + 2P' & 2\varrho U - s\varrho & 0 \\ u_2^2 - su_2 + \frac{1}{c_0}P' & 0 & 2\varrho u_2 - s\varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varrho} \\ \dot{U} \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (50)$$

и либо

$$\varrho = \text{const}, \quad U = \text{const}, \quad u_2 = \text{const},$$

либо вектор $(\dot{\varrho}, \dot{U}, \dot{u}_2)^T = R_\lambda$ - собственный для матрицы \mathcal{A} , а $q = \lambda$, соответствующему собственному значению. В дальнейшем фиксируем $c_0 \in (0, 1)$ и рассмотрим случай $\varrho > 0, U > 0, u_2 > 0$. Будем считать, что левое состояние находится на критическом многообразии: $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^T \in \Sigma_+$. Из алгебраического исследования системы (49) следует, что на Σ_+ матрица \mathcal{A} имеет два собственных вектора. В конусе $[\varrho] > 0, [U] > 0, [u_2] > 0$, уменьшая значение $u_{2,-}$, мы выйдем на первую точку пересечения прямой $\varrho \equiv \varrho_-, U \equiv U_-$, с критической гиперповерхностью Σ_+ , так что левое состояние $(\varrho_-, U_-, U_{2,-}) \in \Sigma_+$ и правое состояние $(\varrho_+, U_+, U_{2,+})$ лежит выше Σ_+ . Тогда

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2}(U_- + \sqrt{2P'(\varrho_-)})$$

Для достаточно малого $[u_2]$ существует решение системы (49), определяющее часть волны разряжения между левым $(\varrho_-, U_-, U_{2,-})$ и правым $(\varrho_+, U_+, U_{2,+})$ состояниями. Это критическая волна разряжения, т.е. существует волны разряжения с левым $(\varrho_-, U_-, U_{2,-} + \varepsilon)$ и правым $(\varrho_+, U_+, U_{2,+})$ состояниями, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Таким образом, мы не можем соединить волной разряжения точки фазового пространства, лежащие по разные стороны верхней критической гиперповерхности Σ_+ в некоторой малой ее окрестности. Теперь рассмотрим второй случай, когда

$$0 < u_2 < \frac{P'(0)}{c} \quad (51)$$

В этом случае получим $\frac{d\varrho}{dm_2} > 0, \forall s \in R$, если

$$\frac{2m_2}{\varrho} - \frac{m_1}{\varrho} - \sqrt{2P'} < 0,$$

т.е. $\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2$ (под верхней гиперповерхностью Σ_+ критического многообразия). Здесь $m_1 = \varrho U, m_2 = \varrho u_2$. В конусе $[\varrho] > 0, [m_1] > 0, [m_2] > 0$, увеличивая значение $u_{2,+}$, мы выйдем на первую точку пересечения прямой $\varrho \equiv \varrho_+, U \equiv U_+$, с критической гиперповерхностью Σ_+ , так что правое состояние $(\varrho_+, U_+, u_{2,+})^T \in \Sigma_+$ и левое состояние $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^T$ лежит ниже Σ_+ . Тогда

$$u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2}(U_+ + \sqrt{2P'(\varrho_+)})$$

Для достаточно малого $[u_2]$ существует решение системы (49), определяющее часть волны разряжения между левым $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^T$ и правым $(\varrho_+, U_+, u_{2,+})^T$ состояниями. Это критическая волна разряжения, т.е. существует волны разряжения с правым $(\varrho_+, U_+, u_{2,+} - \varepsilon)^T$ и левым $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^T$ состояниями, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Таким образом, и в этом случае мы не можем соединить волной разряжения точки фазового пространства, лежащие по разные стороны верхней критической гиперповерхности Σ_+ в некоторой малой ее окрестности.

БИФУРКАЦИЯ ВЕРХНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ РАЗРЯЖЕНИЯ. Будем считать, что левое состояние находится на критическом многообразии $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^T \in \Sigma_+$, $c = const$. Положим $s^\pm = \lambda_2(U^\pm, \varrho^\pm)$. Тогда, как мы формулировали выше, существует верхняя критическая волна разряжения. В случае

$$\omega < s^- = U^- + \sqrt{2P'(\varrho^-)}$$

В переменных $\varrho, m_1 = \varrho U, m_2 = \varrho u_2$ система (49) запишется в виде

$$\begin{aligned} -s\dot{\varrho} + (m_1)^\cdot &= 0, \\ \left(-s + \frac{2m_1}{\varrho}\right)\dot{m}_1 + \left(2P'(\varrho) - \frac{m_1^2}{\varrho^2}\right)\dot{\varrho} &= 0, \\ \left(-s + \frac{2m_2}{\varrho}\right)\dot{m}_2 + \left(-\frac{m_2^2}{\varrho^2} + \frac{P'(\varrho)}{c}\right)\dot{\varrho} &= 0. \end{aligned} \tag{52}$$

Рассмотрим возмущение верхней критической волны разряжения

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho\left(\frac{x}{t}\right) + A(1 - \theta)(x - \omega t), \quad m_1 = m_1\left(\frac{x}{t}\right) + B(1 - \theta)(x - \omega t), \\ m_2 &= m_2^{cr}\left(\frac{x}{t}\right) + \beta(1 - \theta)(x - \omega t), \end{aligned}$$

где $(\varrho(\frac{x}{t}), m_1(\frac{x}{t}), m_2^{cr}(\frac{x}{t}))^T$ - критическая волна разряжения. Для достаточно малого $[\varrho] > 0$ существует возмущение верхней критической волны разряжения, так что

$$\beta = \varrho_-(\omega - 2u_{2,-}^{cr}) < \varrho_-(s^- - 2u_{2,-}^{cr}) < 0.$$

Доказательство смотри в [25]. Там же приведено доказательство существования бифуркации нижней критической волны разряжения.

ВЫВОДЫ. Какие можно сделать выводы? Как мы отмечали выше, существующие формы моделирования турбулентности отражают две крайности-волновую (вибрационная газовая динамика, см. например [1]) и, наиболее распространенную, диффузионную (статистическая) теорию турбулентности [2-4]. В то-

же время, эксперимент показывает, что турбулентность есть сочетание и взаимодействие двух факторов-волнового и диффузионного. Существование двух типов возмущений, с разными скоростями перемещения по газу (звуковые со скоростью звука и энтропийно-вихревые со скоростью потока газа) позволяет выдвинуть гипотезу существования на мезоструктурном уровне двухскоростной гидродинамики, когда разные части газа обладают разными скоростями относительно неподвижного газа, разными коэффициентами переноса, если рассматривать поток этих флуктуаций, обусловленный градиентом их плотностей (точнее химическим потенциалом). То, что энтропийно-вихревые возмущения могут рассматриваться как флуктуации плотности может быть обосновано соответствующим законом сохранения-законом сохранения циркуляции скорости (теорема Томпсона). Очевидно, что это волновые характеристики процесса. В основе классической гидродинамики лежит система Эйлера, регуляризованная за счет моделирования вязкости и турбулентности. Как мы показали-переход при больших числах Рейнольдса от односкоростной модели к двухскоростной связан с потерей строгой гиперболичности системы Эйлера. Двухскоростная модель возникает по той причине, что в общем положении потеря строгой гиперболичности связана с появлением двукратных корней дисперсионного уравнения. Все полученные эффекты есть внутренние свойства самой системы Эйлера, связанные со структурой собственного пространства на критических многообразиях (появление присоединенных векторов). Построенные выше бифуркации критических ударных волн дают ответ на давно поставленную Лаксом задачу о том, что происходит с ударной волной, при прохождении ею в фазовом пространстве критического многообразия. Процесс остается волновым. Попытка опуститься ниже критического многообразия приводит к распаду классической ударной волны, однофронтной, на две-замедление верхнего критического решения и со старой скоростью сброс предвестника, с немонотонным отрицательным профилем. Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтных ударных волн.

Теперь отметим (см. [3]), что в газе наряду с падающей звуковой волной, еще имеем и отраженную звуковую и энтропийно-вихревую волны (а на самой поверхности разрыва возникает рябь (аналог волны Меранго (см. [13])). Согласно с результатами [3], можно утверждать, что в двумерном случае, бифуркация критической устойчивой ударной волны приведет к перемежаемости (полостчатой структуре), затем на самой поверхности разрыва возникнет рябь аналога волны Меранго (см. [13]), которая породит срывающиеся с фронта ударной волны струи (аналог дендритов в кристаллизации (см. [13])). Как видим, это уже факторы сочетания волновых и диффузионных свойств процесса. Можно выдвинуть гипотезу, что в

двумерном случае бифуркация критической волны разряжения [18] приведет к образованию вихрей. Оба эти утверждения имеют отношение к реконструкции пункта б) базовых свойств внутренней турбулентности. Проведенные исследования дают надежду, что природа построенных бифуркаций имеет общий характер.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Раушенбах Б.В., *Вибрационное горение*, Изд. физ.-мат. лит., Москва, 1961, 500 стр.
2. Монин А. С., Яглом А. М., *Статистическая гидромеханика*// Москва, Издательство «Наука», 1965
3. Кузнецов В.Р., Сабельников В.А., *Турбулентность и горения*// М. Наука(1986)
4. Гольдштейн С. (ред.). *Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости*, г. 1-2. М.:ИЛ, 1948.
5. Яковлев Н.Н., Лукашев Е.А., Палин В.В., Радкевич Е.В., *О неклассической регуляризации многокомпонентной системы Эйлера*// *Journal of Mathematical Sciences(New York, Springer) Vol. 196, No.3(2014)*
6. Радкевич Е. В., *О природе бифуркаций однофронтовых решений усеченной системы Эйлера*// *Journal of Mathematical Sciences (New York, Springer) Vol. 196, No. 3(2014)*
7. Каблов Е.Н. С.Т. Кишкин и его вклад в развитие науки и материаловедения. // *Труды международной научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика С.Т. Кишкина*. М.: ВИАМ, 2006, С. 5 - 11.
8. Cahn J.W., Hilliard J.E. *Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy.* // *J. Chem. Physics*, 1958, v. 28, N 2, P. 258 - 267.
9. Cahn J.W., Hilliard J.E. *Free energy of a nonuniform system. III. Nucleation in a two-component incompressible fluid.* // *J. Chem. Physics*, 1959, v. 31, N 3, P. 688 - 699.
10. Lin T.C., Grabovsky W.R., Yelmgren K.E. *The search for optimum configurations for re-entry vehicles.* // *J. Spacecraft Rockets*, 1984, v. 21, N 2, P. 142 - 149.
11. Tartabini P.V., Lepsch R.A., Korte J.J., Wurster K.E. *A multidisciplinary performance analysis of a lifting-body single-stage-to-orbit vehicle*. N.Y., 2000, (Paper / AIAA: N 2000-1045).
12. Яковлев Н.Н., Лукашев Е.А., Радкевич Е.В. *Проблемы реконструкции процесса направленной кристаллизации.* // *Доклады РАН*, 2008, т. 421, е 5, С. 625 - 629.
13. Lukashov E.A., Radkevich E.V., *Solidification and Structuresation of Instability Zones.* // *Applied Mathematics*, 2010, v. 1, P. 159 - 178.
14. Яковлев Н.Н., Лукашев Е.А., Радкевич Е.В. *Исследование процесса направленной кристаллизации методом математической реконструкции.* // *Доклады РАН*, 2012, т. 445, е 4, С. 1 - 4.

15. Бредшоу П. Введение в турбулентность и ее измерение. М.: Мир, 1974.
16. Лапин Ю.В.. Статистическая теория турбулентности (прошлое и настоящее- краткий очерк идей)// Научно технические ведомости 2' 2004, Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры кГидроаэродинамика)
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Гидродинамика, т. 6, изд. 4. М.: Наука, 1988, 736 с.
18. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах (от диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации). М.: Мир, 1979, 512 с.
19. Schlichting H., Airborne hot-wire measurements of the small-scale structure of atmospheric turbulence// Phys. Fluids(1971), v. 14, N. 2, pp. 201-215
20. Corrsin S., Investigation of flow in a axially symmetric heated jet of air// Nat. Adv. Com. Aeronaut Wartime Report, W-94(1943)
21. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикладная математика и механика. - 1956. - Т. 20, No 2. -С. 184Ц195.
22. Нигматулин, Р.И. Динамика многофазных сред //М: Наука, 1987.
23. Яковлев Н.Н., Лукашев Е.А., Радкевич Е.В., О визуализации начальной стадии кристаллизации бинарных сплавов// Нанотехнологии, математическая физика и моделирование, 2014, том 11, No 2, 5-36
24. Рыков Ю. Г., Лысов В. Г., Феодоритова О. Б. Возникновение неклассических скачков в одной модели течения двухкомпонентной, двухскоростной сплошной среды. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша с 74, за 2-12 г.-20 с.
25. Палин В.В., Радкевич Е.В., О бифуркации критических волн разряжения// JOURNAL OF MATHEMATICAL SCIENCES Volume 202, Number 2, 2014
26. Majda A., Pego R., Stable viscosity matrices for system of conservation laws// J. Differential Equations, 56(1985), 229-262
27. Питер Д. Лакс, Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных// М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Ижевский институт компьютерных исследований, 2010.-296с.
28. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.- Докл. АН СССР, Т. 30, No 4, С. 299-303.
29. Prandtl L. Uber die ausgebildete turbulenz. - ZAMM, 1928, No 5.
30. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 6-е, М.: Наука, 1987.

32. Van-Driest E.R. *On turbulent flow near a wall. J. Aeronaut. Sci.*, 1956, v. 23, No 10.
33. Скрипов В.П., Скрипов А.В., Спинодальный распад (Фазовый переход с участием неустойчивых состояний) // УФН, 1979, т.128, вып. 2, с. 193-231.
34. Dreyer W. and Wagner B., *YSharp-Interface Model for Eutectic Alloys. Part I. Concentration Dependent Surface Tension, Y Preprint*, 2003.
35. Радкевич Е. В., *Математические вопросы неравновесных процессов*// Новосибирск, Белая серия в математической физике, 2007, 286стр.
36. Бурико Ю. Я., Кузнецов В.Р., Влияние диффузионного расслоения на процесс горения однородной смеси в ламинарном и турбулентном потоке//Физика горения и взрыва, т.12 N 3, (1976), с. 390-397
37. Воль К., Шор Л., и др. Четвертый международный симпозиум по вопросам горения и детонационных волн, М. Оборонгиз, 1958
38. Карпов В.П., Соколик А.С., Докл. АН СССР, 1961, 138, 4
39. Whol K., Shot I., *Ind/ Chem/*, 1955, 47, 828
40. Кузнецов В.Р., *Материалы Четвертого всесоюзного симпозиума по горению и взрыву*// М. Наука, 1975
41. Франк-Каменецкий Д.А., *Диффузия и теплопередача в химической кинетике*, М. Наука, 1967