ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 01.01.01

1. Действительный анализ и функциональный анализ

1.1. Необходимые (базовые) сведения

Мера и интеграл Лебега. Теоремы Егорова и Лузина. Теоремы Лебега, Беппо Леви и Фату. Неравенства Гёльдера, Минковского и Йенсена. Теорема Фубини. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса.

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции ограниченной вариации. Абсолютно непрерывные функции. Восстановление функции по ее производной.

Метрические и топологические пространства. Основные свойства компактных пространств. Теорема Тихонова. Критерии компактности метрических пространств. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.

Нормированные и евклидовы пространства. Пространства L_p, их полнота. Ортогональные проекции. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Полные и замкнутые ортонормированные системы. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Примеры базисов в L_2. Критерии компактности в $C[a, b]$ и $L_p[a, b]$.

Тригонометрические ряды. Признаки сходимости Дини и Жордана рядов Фурье. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Формула обращения. Теорема Планшереля.

Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана–Банаха. Теоремы об отделимости выпуклых множеств. Локально выпуклые пространства.

Общий вид непрерывных линейных функционалов на основных функциональных пространствах. Слабая топология и слабая сходимость в банаховом пространстве. Сопряженное пространство и $*$-слабая топология в нем. Теорема Банаха-Алаоглу.

Спектр и резольвента. Компактные операторы. Спектр компактного оператора. Теоремы Фредгольма. Теорема Гильберта–Шмидта.

Пространства D и S. Обобщенные функции классов D' и S'. Дифференцирование и свертка обобщенных функций. Преобразование Фурье в S'. Пространства Соболева: равносильные определения и теоремы вложения в L_p и в C.

1.2. Дополнительные (специальные) вопросы

Мера Хаара на локально компактных группах; меры Хаара на группе обратимых матриц и группе ортогональных матриц. Бесконечное произведение мер.

Результаты количественного характера о конечномерных нормированных пространствах, их следствия и приложения: теорема Джона, почти сферические сечения выпуклых тел, теорема факторизации Гротендика.

Всплески: основные понятия и примеры.

Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема (приведение к виду умножения на функцию и представление через интеграл по проекторной мере). Функциональная модель унитарного оператора.

Банаховы алгебры (определение и примеры).

Неограниченные операторы (основные понятия и примеры). Симметричные и самосопряженные операторы. Самосопряженные расширения. Индексы дефекта. Спектральная теорема для неограниченных самосопряженных операторов. Непрерывные операторные полугруппы и их генераторы (основные понятия и примеры). Теорема Стоуна для однопараметрических групп унитарных операторов.

Структура обобщенных функций с компактным носителем. Уравнения с частными производными с постоянными коэффициентами в классах обобщенных функций; применение преобразования Фурье; разрешимость в D' и S'.

Дифференцирование в нормированных пространствах. Производные Гато и Фреше. Производные высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функций. Необходимое условие локального минимума. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Метод Ньютона.

2. Комплексный анализ

2.1. Необходимые (базовые) сведения

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца.

Равномерно сходящиеся ряды голоморфных функций; теорема Вейерштрасса. Представление голоморфных функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули голоморфных функций. Теорема единственности. Классификация изолированных особых точек. Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше.

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолистности. Обратный принцип соответствия границ. Принцип симметрии Римана–Шварца. Теорема Гурвица. Критерий предкомпактности семейства функций (теорема Монтеля). Теорема Римана.

Гармонические функции двух переменных, их связь с голоморфными функциями. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцирумость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теоремы единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Продолжение вдоль пути. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки (ветвей) аналитических функций, точки ветвления.

2.2. Дополнительные (специальные) вопросы

Интеграл типа Коши и интеграл в смысле главного значения. Формулы Сохоцкого. Теоремы Рунге о приближении голоморфных функций рациональными функциями и многочленами. Теорема Каратеодори о соответствии границ при конформных отображениях (для жордановых областей).

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

Формула Кристоффеля–Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара.

Дискриминант многочлена. Два определения алгебраической функции: функциональное и алгебраическое; их эквивалентность.

Степенные ряды от нескольких переменных: полидиск сходимости, область сходимости и ее логарифмическая выпуклость. Голоморфные функции нескольких переменных: -дифференцируемость, представимость кратной интегральной формулой Коши, разложение в степенной ряд, эквивалентность трех условий. Многомерные версии интегральной теоремы Коши и теоремы Мореры. Логарифмическая выпуклость и продолжение голоморфных функций; области голоморфности. Голоморфные отображения: комплексные версии теорем о неявном и обратном отображении, теорема Картана об автоморфизмах ограниченной области.

3. Анализ на многообразиях

Гладкие многообразия и дифференциальные формы. Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа.

Основная литература

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976 (1989).

Зорич В.А. Математический анализ. Т. 2. М.: Наука, 1984.

Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967-1968.

Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1976 (1985).

Дополнительная литература

Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. М.: РХД, 2011.

Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу. Ч. I, II. 2-е изд. Мех-мат ф-т МГУ, М., 2010.

Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976 (1981).

Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.

Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991.

Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1975 (1991).

Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977 (1999).

Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1976.

Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2005.

Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.