$$\det A(t)=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 4+t\\ 2 & 5-2t & 1\\ 3 & 4 & -2\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}5-2t & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}+$$

$$=(4+t)\begin{vmatrix}2 & 5-2t\\ 3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-(-10+4t-4)+21+(4+t)(8-15+6t)=6t^2+13t+7\,.$$

Итак, $\operatorname{rg} A(t)=2$ будет при условии

$$6t^2+13t+7=(t+1)(6t+7)=0\,,$$

т.е. при $t=-1$ или при $t=-\frac{7}{6}$.

Ответ. $\operatorname{rg} A(t)=2$ при $t=-1$ или при $t=-\frac{7}{6}$; $\operatorname{rg} A(t)=3$ при остальных t.

Теорема о ранге матрицы имеет несколько важных следствий.

Следствие 1. Ранг матрицы не превосходит числа её строк (столбцов).

Следствие 2. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Тогда обратная матрица A^{-1} существует (т.е. матрица A невырождена), если и только если $\operatorname{rg} A=n$.

Доказательство. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно условие $|A|\neq 0$. Но определитель квадратной матрицы — это наибольший по размеру минор этой матрицы. По п. 3 теоремы о ранге матрицы если $\operatorname{rg} A=n$, то $|A|\neq 0$. Если же $|A|\neq 0$, то $\operatorname{rg} A=n$.

Следствие 3. $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} A^T$.

Следствие 4. Пусть $A=(a_{ij})$ — матрица $m\times n$, а $B=(b_{jk})$ — матрица $n\times p$. Тогда $\operatorname{rg} AB\le\operatorname{rg} A$ и $\operatorname{rg} AB\le\operatorname{rg} B$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\operatorname{rg} AB\le\operatorname{rg} A$. Пусть $C=AB$ и C_t — это столбец с номером t матрицы C. Поскольку $c_{it}=a_{i1}b_{1t}+\ldots+a_{in}b_{nt}$, где $1\le i\le m$, то мы можем записать, что $C_t=b_{1t}A_1+\ldots+b_{nt}A_n$, где $A_1,\ldots,A_n$ — столбцы матрицы A.

Другими словами, столбцы матрицы $C=AB$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы A. Следовательно, линейно независимых столбцов матрицы C не может быть больше максимального числа линейно независимых столбцов матрицы A, т.е. $\operatorname{rg} C\le\operatorname{rg} A$.

Аналогично показывается, что строки матрицы $C=AB$ являются линейными комбинациями строк матрицы B. Поэтому и $\operatorname{rg} C\le\operatorname{rg} B$.

Следствие 5 (теорема Кронекера-Капелли). Пусть имеется система линейных уравнений, записанная в матричной форме как $AX=B$. Тогда система совместна (имеет решение), если и только если ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы $(A\,|\,B)$.

Доказательство. Добавление к матрице A ещё одного столбца B либо не меняет ранга, либо повышает ранг на 1.

Пусть сначала $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A\,|\,B)$. Это означает, что столбец B линейно выражается через столбцы матрицы A, т.е. мы можем записать равенство $B=k_1A_1+\ldots+k_nA_n$, где $A_1,\ldots,A_n$ — столбцы матрицы A. Но это означает, что набор $X=(x_1,\ldots,x_n)^T=(k_1,\ldots,k_n)^T$ будет решением системы.

Обратно, если система имеет решение $X=(x_1,\ldots,x_n)^T=(k_1,\ldots,k_n)^T$, то для столбца B имеется равенство $B=k_1A_1+\ldots+k_nA_n$, т.е. он линейно выражается через столбцы матрицы A. Следовательно, ранг системы столбцов расширенной матрицы $(A\,|\,B)$ не больше ранга матрицы A и тогда $\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A\,|\,B)$.

7.3. Решение систем линейных уравнений с помощью базисного минора. Пусть дана система из m линейных уравнений с n неизвестными, записанная в матричной форме как

$$AX=B\,,$$

где $A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ — матрица системы, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ — стол-