Граничные возмущения краевых задач: резольвентная сходимость и ее приложения.

Степин Анатолий Михайлович
Цылин Иван Вячеславович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра "Теории Функций и Функционального Анализа"

Москва, декабрь 2014

Объекты и задачи.

Пусть

1. (M, g) — *гладкое компактное риманово многообразие без края.*
2. *Оператор* $\mathcal{A}$ *вида*

$$\mathcal{A}u = -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\,\partial_i\left(a^{ij}\sqrt{\det g}\,\partial_j u\right) + b^i\partial_i u + cu,$$

Для $\Omega \subsetneq M$

Рассмотрим

1. *Краевую задачу Дирихле*

$$\mathcal{A}u = f, \quad f \in H^{-1+s}(M)$$

в классе $\mathring{H}^1(\Omega)$, *понимаемую в вариационном смысле.*

2. *Краевую задачу на собственные значения* $(b^i \equiv 0)$

$$\mathcal{A}u = \lambda u, \quad u \in \mathring{H}^1(\Omega),$$

Нас будет интересовать:

Вопрос 1

Что можно сказать о гладкости решения задачи (1), если область Ω не липшицева?? Можно ли гарантировать, что

$$u \in \tilde{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$$

Как величина ε зависит от оператора и регулярности границы?

Вопрос 2

Если мы начнем варьировать нелипшицеву область Ω в задаче (2), как сильно изменятся собственные значения?? Возможно ли получить оценки вида

$$|\lambda_n(\Omega_1) - \lambda_n(\Omega_2)| \leq C_n \phi(d(\Omega_1, \Omega_2)),$$

где d – измеритель уклонения Ω_2 от Ω_1 (например, метрика Хаусдорфа).

Для получения ответов на эти вопросы мы воспользуемся понятием резольвентной сходимости краевых задач.

Нас будет интересовать:

Вопрос 1

Что можно сказать о гладкости решения задачи (1), если область Ω не липшицева?? Можно ли гарантировать, что

$$u \in \tilde{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$$

Как величина ε зависит от оператора и регулярности границы?

Вопрос 2

Если мы начнем варьировать нелипшицеву область Ω в задаче (2), как сильно изменятся собственные значения?? Возможно ли получить оценки вида

$$|\lambda_n(\Omega_1) - \lambda_n(\Omega_2)| \le C_n \phi(d(\Omega_1, \Omega_2)),$$

где d – измеритель уклонения Ω_2 от Ω_1 (например, метрика Хаусдорфа).

Для получения ответов на эти вопросы мы воспользуемся понятием резольвентной сходимости краевых задач.

Нас будет интересовать:

Вопрос 1

Что можно сказать о гладкости решения задачи (1), если область Ω не липшицева?? Можно ли гарантировать, что

$$u \in \tilde{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$$

Как величина ε зависит от оператора и регулярности границы?

Вопрос 2

Если мы начнем варьировать нелипшицеву область Ω в задаче (2), как сильно изменятся собственные значения?? Возможно ли получить оценки вида

$$|\lambda_n(\Omega_1) - \lambda_n(\Omega_2)| \leq C_n \phi(d(\Omega_1, \Omega_2)),$$

где d – измеритель уклонения Ω_2 от Ω_1 (например, метрика Хаусдорфа).

Для получения ответов на эти вопросы мы воспользуемся понятием резольвентной сходимости краевых задач.

Нас будет интересовать:

Вопрос 1

Что можно сказать о гладкости решения задачи (1), если область Ω не липшицева?? Можно ли гарантировать, что

$$u \in \tilde{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$$

Как величина ε зависит от оператора и регулярности границы?

Вопрос 2

Если мы начнем варьировать нелипшицеву область Ω в задаче (2), как сильно изменятся собственные значения?? Возможно ли получить оценки вида

$$|\lambda_n(\Omega_1) - \lambda_n(\Omega_2)| \leq C_n \phi(d(\Omega_1, \Omega_2)),$$

где d – измеритель уклонения Ω_2 от Ω_1 (например, метрика Хаусдорфа).

Для получения ответов на эти вопросы мы воспользуемся понятием резольвентной сходимости краевых задач.

Классические и современные результаты по первому вопросу.

Theorem (Nirenberg, 1955 / Lions–Magenes, 1972)

1. Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^d$, $\Omega \in C^{1,1}$,
2. $\mathcal{A} = -\Delta$,
3. $f \in L^2(\Omega)$.

$$u \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega).$$

Theorem (Savare, 1998)

1. Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^d$, $\Omega \in C^{0,1}$,
2. $a^{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega), b^i, c \in L^\infty(\Omega)$,
3. $f \in H^{-1+s}(\Omega)$, $s \in (0, 1/2)$.

$$u \in \tilde{H}^{1+s}(\Omega).$$

здесь

$$\tilde{H}^\sigma(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in H^\sigma(\mathbb{R}^d) \mid \operatorname{ess\,supp} u \subset \overline{\Omega}\}$$

Классические и современные результаты по первому вопросу.

Theorem (Nirenberg, 1955 / Lions–Magenes, 1972)

1. Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^d$, $\Omega \in C^{1,1}$,
2. $\mathcal{A} = -\Delta$,
3. $f \in L^2(\Omega)$.

$$u \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega).$$

Theorem (Savare, 1998)

1. Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^d$, $\Omega \in C^{0,1}$,
2. $a^{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega), b^i, c \in L^\infty(\Omega)$,
3. $f \in H^{-1+s}(\Omega)$, $s \in (0, 1/2)$.

$$u \in \tilde{H}^{1+s}(\Omega).$$

здесь

$$\tilde{H}^\sigma(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in H^\sigma(\mathbb{R}^d) \;\big|\; \operatorname{ess\,supp} u \subset \overline{\Omega}\}$$

Theorem (М. С. Агранович, 2006)

Пусть коэффициенты $a_{jk} \in C^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ *симметричны и сильно эллиптичны,* Ω *ограниченная подобласть в* $\mathbb{R}^d$ *класса* $C^{0,1}$, *тогда оператор* $\mathcal{D}(s,p)$ *определяемый вариационной формулой*

$$(f,v)_{0,\Omega} = \Phi_\tau(u,v), \quad \forall v \in \tilde{H}_{p'}^{1/2+1/p'-s}(\Omega)$$

является ограниченным линейным оператором в парах

$$\mathcal{D}(s,p) : H_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega) \to \tilde{H}_p^{1/2+1/p+s}(\Omega), \quad |s| < 1/2, \ \ 1 < p < \infty.$$

Более того, для каждого малого $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$, *что*

$$\exists \mathcal{D}^{-1}(s,p) : \tilde{H}_p^{1/2+1/p+s}(\Omega) \to H_p^{-1/2-1/p'+s}(\Omega), \quad |s| \leq 1/2 - \varepsilon, \quad |1/p - 1/2| \leq \delta$$

здесь $1/p + 1/p' = 1$, H_p^σ — пространство Лиувилля – подмножество L^p с конечной нормой $\|u\|_{H_p^\sigma} = \|F^{-1}(1+|\xi|^2)^{\sigma/2} Fu\|_{L^p}$, F — преобразование Фурье, $(\cdot,\cdot)_{0,\Omega}$ продолженное по непрерывности скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ на соответствующее декартово произведение, и

$$\Phi_\tau(u,v) = \int_\Omega a^{jk} \partial_k u \partial_j \tilde{v} dx + \tau(u,v)_{0,\Omega}, \quad \tau \equiv \mathrm{const} > 0.$$

Классические и современные результаты по второму вопросу.

Литература по вопросу о возмущении границ в краевой задаче на собственные значения приведена в книге Като.

Как позже оказалось, наиболее удобным инструментом для работы с резольвентной сходимостью является эквивалентная ей сходимость пространств $\mathring{H}^1(\Omega)$ в смысле Mosco.

Definition

Пусть есть последовательность ограниченных областей $\{\Omega_n\}$ и некоторая ограниченная область Ω, тогда говорят, что $\mathring{H}^1(\Omega_n)$ сходится к $\mathring{H}^1(\Omega)$ в смысле Mosco, если одновременно

M1 $\forall u \in \mathring{H}^1(\Omega)\ \exists \{u_n\} : u_n \in \mathring{H}^1(\Omega_n)\ \Rightarrow u_n \overset{H^1(M)}{\to} u;$

M2 $\forall \{u_n\} : u_n \in \mathring{H}^1(\Omega_{k_n})\ \exists u \in \mathring{H}^1(\Omega) \Rightarrow u_n \overset{H^1(M)}{\rightharpoonup} u.$

Theorem (Frehse, 1982)

M1 *– выполнено* $\Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R}^d\ \ \forall \delta > 0$

$$\operatorname{cap}\left(\Omega^c \cap \overline{B_\delta(x)}, B_{2\delta}(x)\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \operatorname{cap}\left(\Omega_n^c \cap \overline{B_\delta(x)}, B_{2\delta}(x)\right) \tag{1}$$

M2 *– выполнено* $\Leftrightarrow\ \forall x \in \mathbb{R}^d\ \ \forall \delta > 0$

$$\operatorname{cap}(\Omega^c \cap B_\delta(x), B_{2\delta}(x)) \leq \liminf_{n\to\infty} \operatorname{cap}\left(\Omega_n^c \cap B_\delta(x), B_{2\delta}(x)\right) \tag{2}$$

где

$$\operatorname{cap}(E, D) = \inf_{\substack{u \in \overset{\circ}{H}{}^1(D) \\ u|_E \equiv 1}} \left\{ \int_D |\nabla u|^2 dx \right\}$$

Интересно посмотреть, как критерий Винера соотносится со сходимостью по Хаусдорфу. Для этого, предположим, что все области принадлежат некоторому классу $\mathcal{F}$. Тогда на $\mathcal{F}$ сходимость Mosco эквивалентна сходимости по Хаусдорфу, если

Theorem (Bucur–Zolésio, 1995)

Cap density

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{c,r} = \left\{ \Omega \;\middle|\; \forall x \in \partial\Omega \ \forall t \in (0,r) \quad \frac{\operatorname{cap}(\Omega^c \cap B_t(x), B_{2t}(x))}{\operatorname{cap}(B_t(x), B_{2t}(x))} \geq c \right\}$$

Theorem (Bucur–Zolésio, 1997)

Uniform Wiener

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_g = \left\{ \Omega \;\middle|\; \forall x \in \partial\Omega \ \forall r, R : 0 < r < R < 1 \quad \int_r^R \frac{\operatorname{cap}(\Omega^c \cap B_t(x), B_{2t}(x))}{\operatorname{cap}(B_t(x), B_{2t}(x))} \frac{dt}{t} \geq g(r,R,x) \right\},$$

$\lim_{r\to 0} g(r,R,x) = +\infty$ *локально равномерно по* x.

Классификация Буренкова.

Пусть $\rho > 0, s, s', \in \mathbb{N}, s' \leq s$, $\{V_j\}_{j=1}^s$ – семейство ограниченных открытых прямоугольных параллелипипедов, а $\{r_j\}_{j=1}^s$ – семейство поворотов. Говорят, что Ω принадлежит классу $C^\omega(\rho, s, s', \{V_j\}_{j=1}^s, \{r_j\}_{j=1}^s)$, если

(i) $\Omega \subset \cup_{j=1}^s V_j^{-\rho}$ и $V_j^{-\rho} \cap \Omega \neq \varnothing$ при всех $j = 1, \ldots, s$;

(ii) $V_j \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ при всех $j = 1, \ldots, s'$ и $V_j \subset \Omega^{-\rho}$ при всех $s' < j \leq s$;

(iii) существуют такие числа a_{jl}, b_{jl}, что $a_{jl} < b_{jl}$ при всех $j = 1, \ldots, s$ и $l = 1, \ldots, d$,

$$r_j(V_j) = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, a_{jl} < x_l < b_{jl},\ l = 1, \ldots, d\}$$

при всех $j = 1, \ldots, s$ и

$$r_j(\Omega \cap V_j) = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, a_{jd} < x_d < g_j(\bar{x}),\ \bar{x} \in W_j\}$$

при всех $j = 1, \ldots, s'$, где $x = (\bar{x}, x_d), \bar{x} = (x_1, \ldots, x_{d-1})$, $W_j = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{d-1} \,|\, a_{jl} < x_l < b_{jl}, l = 1, \ldots, d-1\}$, а $C_j\omega$ является модулем непрерывности функции g_j на W_j; кроме того,

$$a_{jd} + \rho \leq g_j(\bar{x}) \leq b_{jd} - \rho.$$

при всех $j = 1, \ldots, s'$ и $\bar{x} \in W_j$.

Theorem (Буренков–Lamberti, 2008)

Пусть

$$Hu = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \partial_\alpha (a^{\alpha\beta} \partial_\beta u), \quad x \in \Omega,$$

коэффициенты $a^{\alpha\beta}$ *липшицевы, симметричны и* $\sum a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geq \theta|\xi|^2$. *От областей потребуем, чтобы* $\Omega_1, \Omega_2 \in C^{0,\omega}(\rho, s, s', \{V_j\}_{j=1}^s, \{r_j\}_{j=1}^s)$. *Тогда*

$$|\lambda_n(\Omega_1) - \lambda_n(\Omega_2)| \leq c_n \omega(d_{\mathcal{HP}}(\Omega_1, \Omega_2)),$$

как только $d_{\mathcal{HP}}(\Omega_1, \Omega_2) < \varepsilon$.

Здесь $d_{\mathcal{HP}}$ — нижнее расстояние Хаусдорфа–Помпейю:

$$d_{\mathcal{HP}}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{e(\Omega_1 \Delta \Omega_2, \partial\Omega_1), e(\Omega_1 \Delta \Omega_2, \partial\Omega_2)\}, \quad e(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} d(x, Y).$$

Основная часть.

Сначала о краевой задаче:

$$\mathcal{A}u = f, \quad u \in \mathring{H}^1(\Omega)$$

$$\mathcal{A}u = -\sqrt{\det g}\,\partial_i \left(\frac{1}{\sqrt{\det g}} a^{ij}\,\partial_j u \right) + b^i \partial_i u + cu,$$

Потребуем выполнения условий на оператор $\mathcal{A}$.

Основная часть.

Сначала о краевой задаче:

$$\mathcal{A}u = f, \quad u \in \mathring{H}^1(\Omega)$$

$$\mathcal{A}u = -\sqrt{\det g}\,\partial_i\left(\frac{1}{\sqrt{\det g}}a^{ij}\,\partial_j u\right) + b^i\partial_i u + cu,$$

Потребуем выполнения условий на оператор $\mathcal{A}$.

Оператор.

Многообразие (M, g) является $W^{2,\infty}$–гладким связным компактным римановым многообразием без края. Метрику соответствующую тензору g обозначим δ.

Коэффициенты a^{ij}, b^i, c определяют симметричное невырожденное сечение **A** расслоения T^2M класса $W^{1,\infty}$, векторное поле **b** и функцию класса L^∞ соответственно:

A1 $a^{ij}(x) = a^{ji}(x) \quad \forall x \in \chi_n(U_n)$;

A2 $\mathrm{a}_1|\xi|^2 \leq \mathfrak{a}(x,\xi) \overset{\text{def}}{=} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mathrm{a}|\xi|^2 \quad \forall x \in \chi_n(U_n), \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d$, всюду ниже предполагается, что $\mathrm{a}_1 = 1$;

A3 $|\mathfrak{a}(x,\xi) - \mathfrak{a}(y,\xi)| \leq L|x-y||\xi|^2$ для п.в. $x, y \in \chi_n(U_n), \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^d$.

A4 $b^i, c \in L^\infty(M), \quad \sum_i |b^i(x)|^2 \leq \mathrm{b}^2, \ \ \mathrm{c} \leq c(x) \leq \mathrm{c} + \mathrm{d}$ для п.в. $x \in \chi_n(U_n)$;

Дополнительно наложим условие коэрцетивности:

A5 $\exists \alpha > 0 : \alpha \left(\int_M \langle \mathbf{A}\nabla u, \nabla u\rangle + cu^2 d\mu \right) \leq \int_M \langle \mathbf{A}\nabla u, \nabla u\rangle + \langle \mathbf{b}, \nabla u\rangle u + c(x)u^2 d\mu, \quad \forall u \in H^1(M)$, где $d\mu$ — форма объема.

Пространство областей. Часть 1.

Открытое множество Ω удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметром r на множестве U в x_0, если

$$\exists \xi_x \in \mathbb{R}^d, |\xi_x| = 1 : \forall h \in \mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_{\omega,r}(\xi_x) \cup \mathcal{F}_{\omega,r}(\xi_x)$$

W1 $((B_{3\psi(r)}(x_0) \cap \Omega) - h) \cap U \subset U \cap \Omega$;

W2 $((B_{3\psi(r)}(x_0) \backslash \Omega) + h) \cap U \subset U \backslash \Omega$,

где $\mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)$ получается из $\mathcal{C}_{\omega,r}(e_d)$ поворотом, так чтобы e_d и ξ_x совместились и

$$\mathcal{F}_{\omega,r}(e_d) = \left\{z = (\tilde{z}, z^d) \in \mathbb{R}^d : \ |z| < \psi(r), \ z^d \geq \omega(r)\right\},$$
$$\mathcal{S}_{\omega,r}(e_d) = \left\{(\tilde{z}, z^d) \in \mathbb{R}^d : \omega(|\tilde{z}|) < z^d < \omega(r), \ |\tilde{z}| < r\right\}.$$

Пространство областей. Часть 2.

Для произвольной матричной функции $A \in W^{1,\infty}(\tilde{\Omega})$, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ определим норму:

$$\|A\|_{W^{1,\infty}} \overset{\text{def}}{=} \||A|_2\|_{L^\infty} + \left\|\max_j |\partial_j A|_2\right\|_{L^\infty}, \quad |A|_2 \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\tilde{r}(A^t A)},\ \tilde{r} \text{ — спектральный радиус.}$$

Скажем, что атлас $\mathfrak{W}$ является (ρ, ϑ)–техническим, если

W3 $\forall y \in M\ \exists (W_y, \chi_y) \in \mathfrak{W} : W_y \supset \mathcal{B}_{3\rho}(y) \overset{def}{=} \chi_y^{-1}(B_{3\rho}(\chi_y(y)))$,

W4 $W^{1,\infty}(\chi(W))$–норма $g \circ \chi$ не превосходит ϑ, и $L^\infty(\chi(W))$–норма $|g \circ \chi|_2$ оценивается снизу числом ϑ^{-1}.

W5 Для прямых и обратных функций перехода из U_n в произвольную $W \in \mathfrak{W}$, $W^{1,\infty}$ норма матрицы Якоби $J = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ не превосходит ϑ.

Пространство областей. Определение.

Definition

Открытое множество $\Omega \subset M$ удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметрами (r, ϑ), если существует (ρ, ϑ)–технический атлас такой, что для любого $y \in M$ открытое множество $\chi_y(\Omega \cap \mathcal{B}_{3\rho}(y))$ удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметром r на множестве $B_{3\rho}(y)$ в точке y, и $\rho = \psi(r)$. Данный класс будем обозначать $\mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$.

Proposition

Если $\omega(0) = 0$, то для любой области Ω с границей класса $C^{0,\omega}$ существует содержащий ее класс $\mathcal{W}^{C\omega}_{r,\vartheta}$, $C \equiv \mathrm{const} > 0$.

Аналогичное утверждение в случае липшицевой границы получено Chenais (1978).

Пространство областей. Определение.

Definition

Открытое множество $\Omega \subset M$ удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметрами (r, ϑ), если существует (ρ, ϑ)–технический атлас такой, что для любого $y \in M$ открытое множество $\chi_y(\Omega \cap \mathcal{B}_{3\rho}(y))$ удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметром r на множестве $B_{3\rho}(y)$ в точке y, и $\rho = \psi(r)$. Данный класс будем обозначать $\mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$.

Proposition

Если $\omega(0) = 0$, то для любой области Ω с границей класса $C^{0,\omega}$ существует содержащий ее класс $\mathcal{W}^{C\omega}_{r,\vartheta}$, $C \equiv \mathrm{const} > 0$.

Аналогичное утверждение в случае липшицевой границы получено Chenais (1978).

На пути к резольвентной сходимости. Оценки решений.

Пусть $a : V \times V \to \mathbb{R}$ – непрерывная билинейная форма такая, что для данных $\mu_a, \mu_s, \alpha > 0$ удовлетворяет

$$\alpha \|u\|_V^2 \leq a_s(u,u) = a(u,u) \leq \mu_s \|u\|_V^2, \quad a_a(u,v) \leq \mu_a \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall u, v \in V,$$

Обозначим $u = \mathcal{G}(f; V)$ решение задачи $\quad a(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v_1 \in V_1$

Proposition (Savaré, 2002)

Пусть $V_{1,2} \subset V_1 \cap V_2$, $V_1 \cup V_2 \subset V^{1,2}, V^{2,1} \subset V$, $u_i = \mathcal{G}(f; V_i)$, $u^{1,2} = \mathcal{G}(f; V^{1,2})$ *и т. д. Тогда*

1. $\|u_1 - u_2\|_V \leq \sigma \left(d(u_1, V_{1,2}) + d(u_2, V_{1,2}) \right)$
2. $\|u_1 - u_2\|_V \leq \sigma \left(d(u^{1,2}, V_1) + d(u^{1,2}, V_2) \right)$
3. $\|u_1 - u_2\|_V \leq \sigma^2 \left(d(u^{1,2}, V_1) + d(u^{2,1}, V_2) \right)$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mu_s}{\alpha} + \frac{\mu_a}{\alpha}}.$$

Продолжение. Оценки сдвига. Часть 1.

Lemma

Пусть $X, Y \subset M$ *два открытых подмножества, атлас* $\mathfrak{W}$ *является* (ρ, ϑ)*–техническим,* $v \in V_Y$*. Обозначим* $\Lambda = Y \backslash X$ *и предположим, что для любой точки* $y \in \Lambda$ *существует вектор* $\nu(y)$

$$\forall x \in \mathcal{B}_\rho(y) \backslash X \Rightarrow S_{y,\nu(y)} x \notin Y \cap \mathcal{B}_{3\rho}(y),$$

и для некоторых суммируемых функций G, H *справедливо:*

$$\int_{\mathcal{B}_\rho(y)} |v \circ S_{y,\nu(y)} - v|^2 d\mu \leq \int_{\mathcal{B}_{3\rho}(y)} G \, d\mu, \qquad \int_{\mathcal{B}_\rho(y)} \mathfrak{a}(x, \nabla v \circ S_{y,\nu(y)} - \nabla v) d\mu \leq \int_{\mathcal{B}_{3\rho}(y)} H \, d\mu,$$

для любой точки $y \in \Lambda^{3\rho} = \cup_{y \in \Lambda} \mathcal{B}_{3\rho}(y)$*. Тогда можно построить функцию* $w \in V_X$*:*

$$\|w - v\|_V^2 \leq C(M, \vartheta, \rho, \mathrm{a}, \mathrm{p}) \int_{\Lambda^{3\rho}} (G + H) \, d\mu.$$

здесь $S_{y,h} = \chi_y^{-1} \circ (x + h) \circ \chi_y$.

Продолжение. Оценки сдвига. Часть 2.

Введем величину

$$[u]^2_{H,\mathcal{B}_{m\rho}(y)} = \int_{\mathcal{B}_{m\rho}(y)} \sum_i \left(\frac{\partial (u \circ \chi_y^{-1})}{\partial x^i} \right)^2 d\mu_y.$$

Lemma (Соболев)

Если $v \in H^1(M)$, $y \in M$, *тогда для любого* $h \in B_\rho(0)$, *следует*

$$\int_{\mathcal{B}_{2\rho}(y)} |v \circ S_{y,h} - v|^2 d\mu \le C(\mu, M)|h|^2 [u]^2_{H,\mathcal{B}_{3\rho}(y)}$$

Lemma

Пусть $Z \subset M$, $Z \in \mathcal{W}^\omega_{r,\vartheta}$, $f \in L^2(M)$, $u = \mathcal{G}(f;\ \mathring{H}^1(\Omega))$, $y \in M$, $h = |h|\xi_y$, $|h| < \psi(r)$, *тогда существует такое положительное число* $C_2 = C_2(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{L}, \mathrm{c}, \mathrm{p}, \vartheta)$, *что*

$$\|u - u(S_{y,h})\|^2_{H^1(\mathcal{B}_{\psi(r)}(y))} \le C_2|h| \left[\|u\|^2_{H^1(\mathcal{B}_{3\psi(r)}(y))} + 2\|f - (c(x) - \mathrm{c})u\|_{L^2(\Omega \cap \mathcal{B}_{2\psi(r)}(y))} \|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{B}_{3\psi(r)}(y))} \right]$$

Наблюдения о пространствах областей.

Первое

Пусть $\Omega \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $\omega(0) = 0$, тогда для любого $\varepsilon < \frac{\psi(r)}{\vartheta}$ верно

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\Omega) \in \mathcal{W}^{\omega+\vartheta\varepsilon}_{r_2,\vartheta},$$

где $r_2 = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(r)}{2\vartheta}\right)$, $\mathcal{O}_\varepsilon(x)$ – шар в метрике δ.

Второе

Пусть $\omega(0) = 0$, $-\eta, \varepsilon > 0$ — достаточно малы тогда для $x \in \mathcal{B}_{2\psi(r)}(y) \backslash \mathcal{O}_\eta(\Omega)$ выполнено

$$x_{\varepsilon-\eta} = x + (\vartheta \cdot (\varepsilon + |\eta|) + (\phi(\varepsilon) + \phi(|\eta|)))\,\xi \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\Omega) \cap \mathcal{B}_{3\psi(r)}(y).$$

Резольвентная сходимость.

Theorem

Пусть $\Omega_1 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $\omega(0) = 0$, $f \in L^2(M)$, $u_i = \mathcal{G}(f;\ \mathring{H}^1(\Omega_i))$,

$$\epsilon = e(\Omega_2 \Delta \Omega_1, \partial\Omega_1) \le \frac{1}{2\vartheta} \min\left(\operatorname{dist}(\Omega_1, \partial U), \psi\left(\min\left(\frac{\phi^{-1}(\psi(r)/2)}{(2\vartheta - 1)}, \frac{\psi(r)}{\vartheta}\right)\right)\right),$$

тогда существует константа $\Gamma = \Gamma(M, \mathrm{p}, \mathcal{A}, r, \vartheta, \omega)$*:*

$$\|u_1 - u_2\|^2_{H^1(M)} \le \Gamma \cdot \phi(\epsilon) \|f\|_{L^2(M)} \|f\|_{H^{-1}(M)}.$$

Если сверх этого $\Omega_2 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2) \le \phi^{-1}\left(\min\left\{\operatorname{dist}(\Omega_2, \partial U), \phi^{-1}(e_0)\right\}\right)$, *то*

$$\|u_1 - u_2\|^2_{H^1(M)} \le \Gamma \cdot \phi(d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1 \Delta \Omega_2, \partial\Omega_1)) \|f\|_{L^2(M)} \|f\|_{H^{-1}(M)}.$$

$$d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{d_{\mathcal{HP}}(\Omega_1, \Omega_2), d^{\mathcal{H}}(\Omega_1, \Omega_2), d_{\mathcal{H}}(\Omega_1, \Omega_2)\}$$

$$d^{\mathcal{H}}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} d_{\mathcal{H}}(M \backslash X, M \backslash Y), \quad d_{\mathcal{H}}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{e(X, Y), e(Y, X)\}.$$

Приложение к спектральной задаче.

Theorem (Об оценке модуля непрерывности собственных значений)

Пусть на многообразии (M, g) *задан оператор* $\mathcal{A}$, $\boldsymbol{b} \equiv 0$, $c \equiv 0$, $\partial\Omega_1 \in C^{0,\omega}$. *Тогда существуют такие положительные константы* $C_k = C_k(\Omega_1, \mathcal{A}, M)$, $\delta_0 = \delta_0(\Omega_1, \omega, M)$, *что для любой подобласти* $\Omega_2 \subset M$ *удовлетворяющей* $\epsilon = e(\Omega_2 \Delta \Omega_1 . \partial\Omega_1) \leq \delta_0$, *выполнены оценки*

$$|\lambda_k(\Omega_1) - \lambda_k(\Omega_2)| \leq C_k(\omega(\epsilon) + \epsilon).$$

Corollary (Теорема Буренкова–Lamberti на многообразии)

Пусть опертор $\mathcal{A}$ *задан на многообразии* (M, g), $\boldsymbol{b} \equiv 0$, $\mathrm{c} \equiv 0$, $\Omega_2, \Omega_1 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $\omega(0) = 0$. *Тогда существуют константы* $C_k = C_k(M, \mathcal{A}, \omega, r, \vartheta) > 0$, $\delta_0 = \delta_0(M_U, \omega, r, \vartheta) > 0$, *что если* $\Omega_1 \Subset M_U$, $\mathfrak{e} = d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2) \leq \delta_0$, *то*

$$|\lambda_k(\Omega_1) - \lambda_k(\Omega_2)| \leq C(\omega(\mathfrak{e}) + \mathfrak{e}).$$

Пространства Бесова.

Мы будем пользоваться вещественным интерполяционным функтором $(\cdot,\cdot)_{s,q}$. Пусть $s \in (0,1)$, $p, q \in [1,\infty]$, рассмотрим

$$B^s_{2,q}(\Omega) = (L^2(\Omega), H^1(\Omega))_{s,q}$$

Proposition

При $t \in (0,1)$ и $q \in [1,\infty]$ справедливы следующие формулы

$$(H^1(\Omega), B^{1+s}_{2,q}(\Omega))_{t,2} = H^{1+ts}(\Omega), \quad (\tilde{H}^1(\Omega), \tilde{B}^{-1+s}_{2,q})_{t,2} = \tilde{H}^{-1+ts}(\Omega).$$

Proposition

Пусть $E_1 \hookrightarrow E_0$ пара банаховых пространств, вложение непрерывно, задан линейный ограниченный оператор $\mathcal{T}$ из E_1 в F, причем

$$\|\mathcal{T}e\|_F \leq L\|e\|^{1-s}_{E_0}\|e\|^s_{E_1}, \ \forall e \in E_1.$$

Тогда $\mathcal{T}$ может быть продолжен непрерывно как ограниченный оператор из $(E_0, E_1)_{s,1}$ в F.

Другое определение $B^{1+s}_{2,\infty}$

Рассмотрим функцию v, определенную на $\mathbb{R}^d$ и вектор $h \in \mathbb{R}^d$, обозначим $v_h(x) = v(x+h)$.

Proposition

Функция $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ принадлежит пространству $B^{1+s}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$ для $s \in (0,1)$ тогда и только тогда, когда существуют константы $c, h_0 > 0$, такие что

$$\|\nabla v - \nabla v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le c|h|^s \quad \forall h \in B_{h_0}(0),$$

где $B_{h_0}(0)$ шар радиуса h_0 с центром в начале координат.

Приложение к первой задаче.

Theorem (О гладкости решений)

Пусть $\Omega \subset M$ *имеет гельдерову границу порядка* $\gamma \in (0,1]$. *Тогда для решений краевой задачи выполнено:*

$$f \in B_{2,1}^{-1/2}(\Omega) \Rightarrow u \in \tilde{B}_{2,\infty}^{1+\gamma/2}(\Omega).$$

А значит:

$$f \in H^{-1+s}(\Omega) \Rightarrow u \in \tilde{H}^{1+\gamma s}(\Omega), \quad s \in (0,1/2).$$

Список литературы

1 Агранович М.С. *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей*, МЦНМО, Москва, 2013.

2 Агранович М.С. *Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях* // Функциональный анализ и его приложения, 2006, т. 40, вып. 4, с. 83-103.

3 Bucur D., Zolésio., *N-Dimensional Shape Optimization under Capacitary Constraints*, J. Differential Equations, 123(2) (1995), 504–522.

4 Bucur D., Zolésio., *Wiener's criterion and shape continuity for the Dirichlet problem.* Boll. Un. Mat. Ital., B 11(4) (1997), 757–771.

5 Burenkov V.I., Lamberti P.D., *Spectral Stability of Higher Order Uniformly Elliptic Operators*, Spectral Stability of Higher Order Uniformly Elliptic Operators, Applications in Analysis and Partial Differential Equations, 69-102, (2009).

6 Chenais D. *Homéomorphisme entre ouverts lipschitziens.* Ann. Mat. Pura Appl. 118(4) (1978), 343–398.

7 Frehse J. *Capacity methods in theory of partial differential equations.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 84(1) (1982), 1–44.

Список литературы

8 Nirenberg L. *Remarks on strongly elliptic partial differential equations.* Comm. Pure Appl. Math., (8): 649–675, 1955.

9 Като Т. *Теория возмущений линейных операторов*. М.: Мир, 1972. (п. VII 6.5.)

10 Lions J. L. and Magenes E. *Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications.* Number I-II. Springer Verlag, Berlin, 1972.

11 Savaré G. *Regularity results for elliptic equations on Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. 1998. V. 152. P. 176-201.

12 Savaré G., Schimperna G. *Domain perturbations estimates for the solutions of second order elliptic equations*, J. Math. Pures Appl. (9) 81 (11) (2002) 1071–1112.

13 Цылин И.В. *О непрерывности собственных значений оператора Лапласа в зависимости от области* // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. (Москва) – 2015. – В.2.