Сравнения бесконечно малых и бесконечно больших функций разных классов

И.Х. Сабитов

Напомним, что запись $o(f(x)), x \to a$, означает, что речь идет о функциях, которые при $x \to a$ представимы в виде $\alpha(x)f(x)$, где $\alpha(x)$ - функция, бесконечно малая (б.м.) при $x \to 0$, в общем случае без всякой обязательности уточнения ее вида. Обычно для множителя $\alpha(x)$ используют обозначение $o(1), x \to a$, так что функцию $o(f(x))$ можно записать и в виде $o(1)f(x), x \to a$. Если при этом известно, что сама функция $f(x)$ при $x \to a$ тоже является б.м., тогда про функцию, представимую при $x \to a$ в виде $o(f(x))$, говорят, что она б.м. более высокого порядка по сравнению с $f(x)$. Если же функция $f(x)$ при $x \to a$ является бесконечно большой (б.б.), то про функцию, представимую при $x \to a$ в виде при $o(f(x))$, говорят, что она *меньшего* порядка, чем функция $f(x)$ (но заметьте, что такая функция вовсе не обязана быть тоже б.б., например, все три функции $g_1(x) = 2x + 3, g_2(x) = \sin x, g_3(x) = \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ представимы в виде $o(x^2), x \to \infty$, но из них при $x \to \infty$ только $g_1(x)$ является б.б., а $g_3(x)$ даже является б.м.). Конечно, наиболее интересно сравнивать две функции одинакового поведения, т.е. обе они или б.м. или обе б.б. Такое сравнение проводится по следующему правилу. Пусть в окрестности точки $x = a$ даны две функции $f(x)$ и $g(x)$. Говорят, что *функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ порядок n относительно функции $g(x)$*, если существуют постоянные $C \neq 0$ и n, такие, что $f(x)$ в окрестности точки $x = a$ можно представить в виде

$$f(x) = C(g(x))^n + o(1)g^n(x), x \to a. \tag{1}$$

Формально значение степени n может быть любым, но, конечно, наиболее интересен случай $n > 0$ (чтобы обе эти функции были или б.м. или б.б.). Заметим, что параметр n вовсе не обязан быть натуральным числом. Он может быть любым числом, лишь бы правая часть формулы (1) имела смысл и было верно само равенство; иногда для этого рассматривают модули функций.

Вспоминая определение эквивалентности функций, мы видим, что равенство (1) можно записать в виде

$$f(x) \sim C(g(x))^n, x \to a,$$

и выражение $C(g(x))^n$ можно назвать главной частью функции $f(x)$ относительно функции $g(x)$ при $x \to a$.

Оказывается, сравнивать таким образом можно не всякие функции. Существуют три основных класса функций, которые сравнимы между собой внутри класса, но функции из разных классов между собой не сравнимы в указанном смысле. Для б.б. функций существуют три качественно разных "скорости" возрастания. Докажем следующие теоремы.

Теорема 1, *При $x \to +\infty$ любая показательная функции a^x с основанием $a > 1$ растет быстрее любой степени $x^p, p > 0$.*

Теорема 2. *При $x \to +\infty$ любая степенная функции $x^p, p > 0$, растет быстрее любой положительной степени логарифмической функции $log_a x$ с основанием $a > 1$.*

Таким образом, имеется три качественно различных типов возрастания: экспоненциальный рост (самый быстрый), степенной рост, логарифмический рост. Они различны в том смысле, что их нельзя сравнить по приведеному выше определению сравнения.

Аналогично, существуют три различных вида убывания функций - экспоненциальное убывание (самое быстрое), убывание степенного порядка и логарифмическое убывание. Они описываются следующими теоремами.

Теорема 3. *При $x \to +\infty$ любая показательная функция $a^{-x}, a > 1$, убывает быстрее чем любая степенная функция $x^{-\alpha}, \alpha > 0$.*

Теорема 4. *При $x \to +\infty$ любая степенная функция $x^{-\alpha}, \alpha > 0$ убывает быстрее чем функция $\dfrac{1}{\log_a x}$ в любой положительной степени.*

Следовательно, про сравнения экспоненциальной, степенной и логарифмической функций можно лишь утверждать, что, например,

$$\forall p \;\; x^p = o(e^x), x \to +\infty; \forall p > 0 \;\; \ln x = o(x^p), x \to +\infty; \forall p > 0 \;\; x^p = o(\frac{1}{\ln x}), x \to 0+0$$

без указания их точного порядка относительно друг друга.

Доказательства всех теорем основаны на применении правила Бернулли-Лопиталя.

1) Рассмотрим функцию $\dfrac{x^p}{a^x}$. При $x \to +\infty$ предел этой функции имеет тип $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Допустим, $p = n$- натуральное. После применения n раз правила Бернулли-Лопиталя, приходим к вычислению предела функции $\dfrac{n!}{a^x(\ln a)^n}$, предел которой при $x \to +\infty$ равен 0. Это и означает, что знаменатель a^x в дроби $\dfrac{x^p}{a^x}$ при $x \to +\infty$ растет быстрее, чем числитель.

Если же показатель p не является натуральным, то после применения правила Бернулли-Лопиталя $[p]+1$ раз мы получим дробь, у которой числитель - постоянное число, а знаменатель при $x \to +\infty$ неограничен. Значит, предел исходного отношения снова равен нулю, что и подтверждает справедливость теоремы.

2) Доказательство можно провести или тоже с использованием правила Бернулли-Лопиталя, или же сделать замену $log_a x = y$ и свести задачу к первой теореме.

3) и 4). В этих случаях рассматриваемые неопределенности вида $\frac{0}{0}$ легко свести к неопределенностям вида $\frac{\infty}{\infty}$ и воспользоваться теоремами 1 и 2.

Интересными являются неопределенности вида $0 \cdot \infty$. Например, в произведении $x^\varepsilon \log_a x, \varepsilon > 0$, при $x \to 0+0$ первый сомножитель стремится к нулю, а второй к ∞. Заменой $\frac{1}{x} = y \to +\infty$ задачу сводим к теореме 2 и получаем, что при $x \to 0+0$ степень x^ε с любым положительным показателем ε стремится к нулю быстрее, чем логарифм к бесконечности. Аналогично показывается, что при $x \to 0$ функция $a^{-\frac{1}{|x|}}, a > 1$, стремится к нулю быстрее чем степенная функция $|x|^p$ с любым положительным показателем.

С помощью экспоненциальных функций можно построить иерархию функций, растущих на каждой следующей ступени несравнимо быстрее по отношению к функциям предыдущей ступени. Например, функция e^{e^x} при $x \to \infty$ растет быстрее любой степени $(e^x)^n, n > 1$.

Аналогично, с помощью логарифмической функции можно построить иерархию функций, растущих на каждой следующей ступени несравнимо медленнее по отношению к функциям предыдущей ступени. Например, функция $\ln\ln x$ при $x \to \infty$ растет медленнее любой степени $(\ln x)^\varepsilon, \varepsilon > 0$.