Демидов С.С.

История математического анализа в XVII – XX вв.
Избранные главы:

Из истории теории дифференциальных уравнений с частными производными

Осенний семестр 2025 г.

Лекция 2

3. Первая четверть XIX в. — замечательный период в истории математического анализа. Давно назревавшая необходимость в более строгом обосновании этой науки привела выдающихся математиков (Гаусс, Больцано и особенно Коши, а затем Абель и другие) к ее построению с помощью значительно усовершенствованной теории пределов. Такое построение потребовало уточнения понятий и свойств предела и бесконечно малой, привело к созданию теории сходимости рядов, общей теории интеграла, а затем учения о действительном числе (Дедекинд, Кантор, Вейерштрасс) и теории функций действительного переменного. Уже Коши перестал приписывать всеобщность теоремам анализа и вводил в их формулировки столь привычные нам ограничительные условия на функции. При этом, что особо для нас важно, большое значение начинают придавать проблемам существования исследуемых объектов. Это были проблемы существования пределов последовательностей, первообразных, определенных интегралов и т. д.

Все эти новые идеи вошли и в теорию дифференциальных уравнений. Здесь на первый план выступает проблема существования решений. Её источником была не только характерная для всего анализа потребность в доказательстве существования объектов, определяемых с помощью инфинитезимальных методов, но и то обстоятельство, что к тому времени выяснилась невозможность интегрирования в квадратурах произвольного обыкновенного дифференциального уравнения. В таких случаях решение получали с помощью «бесконечных» процессов аппроксимации и возникал вопрос о сходимости последних.

О. Коши (1789 – 1857)

В значительной мере по аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями строится и теория уравнений с частными производными. Для них Коши ставит начальную задачу, которую для уравнений второго порядка можно сформулировать на языке дифференциальной геометрии таким образом: имеем произвольную кривую C и описанную развертывающуюся поверхность D, найти интегральную поверхность уравнения второго порядка, проходящую через C и касающуюся вдоль нее D.

Общий интеграл такого уравнения понимается как соотношение между z, x, y и некоторыми произвольными функциями, которое дает полное решение задачи Коши для *любой кривой* C и *поверхности* D при соответствующем выборе этих функций. Такое определение общего интеграла было впервые высказано, по-видимому, Дарбу [16, стр. 98]. Легко показать, что почти все интегралы уравнения (1) могут быть получены как решения некоторой определенной задачи Коши. Исключение составляют лишь те решения (так называемые «особые» решения), вдоль которых $\partial F/\partial r$, $\partial F/\partial s$, $\partial F/\partial t$ тождественно равны нулю.

Таким образом, задача Коши заняла в общей теории дифференциальных уравнений с частными производными второй половины XIX в. центральное положение. В 1874 г. С. В. Ковалевской была доказана теорема существования и единственности аналитического решения этой задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными при аналитичности начальных данных и функций, задающих уравнения, а также в предположении, что рассматриваемая система имеет нормальную форму.

Построение теории общих решений в смысле Дарбу, положившего в основу задачу Коши, потребовало развития теории характеристик. Такую теорию для уравнений второго порядка мы находим в книге П. Дюбуа Реймона «Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln» (Leipzig, 1864).

В самом начале этой монографии автор высказывает интересную точку зрения, которая стала общепринятой в XX столетии: «Если под общим интегралом понимать аналитическое выражение, содержащее все частные интегралы, то такого, на мой взгляд, вообще говоря, не существует. … ………………………………………Напротив, дифференциальные уравнения с частными производными приходится рассматривать совместно с граничными значениями как целое и нельзя разрывать их при исследовании»

В статье 1889 г. «Ueber lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung» (Crelle's Journ. 1889. Bd. 104. 241 - 301), которая должна была в какой-то мере восполнить материал недостающего второго выпуска вышеупомянутой книги, Дюбуа Реймон рассмотрел и случай мнимых характеристик и впервые ввел классификацию уравнений (в случае линейных однородных уравнений) по типам: эллиптический ($\delta < 0$), параболический ($\delta = 0$), гиперболический ($\delta > 0$).

П. Дюбуа Реймон
(1831 – 1889)

Вернёмся к общей геометрической теории уравнений с частными производными – к линии, начало развития которой положил Г. Монж. Следующим этапом здесь стало творчество норвежского математика

Софуса Ли (1842 – 1899)

1842 – родился в Норфворддейде в семье лютеранского пастора

1865 – окончил университет в Христиании

1870 – стажировка в Германии; начало дружбы с Ф. Клейном и их поездка в Париж

1871 – защита диссертации в Христиании

1872 – э.о. профессор ун-та в Христиании

1884 – приезд Ф. Энгеля, помощника в работе над «Теорией групп преобразований» (т.1–3, 1888-93)

1888 – 98 – профессор в Лейпциге

1899 – смерть в Христиании

Софусом Ли была создана новая геометрическая теория уравнений с частными производными 1-го порядка (Theorie der Transformationsgruppen. Bd. 2. Leipzig. 1890).

Рассматривая уравнение $F(x, y, z, p, q)=0$ как уравнение с пятью неизвестными x, y, z, p, q, связанными дифференциальным соотношением $dz-pdx-qdy=0$, Ли ставил задачу исследования его интегральных многообразий — многообразий элементов (x, y, z, p, q), удовлетворяющих уравнению и указанному дифференциальному соотношению. Основным аппаратом исследований Ли стала созданная им теория контактных преобразований. За работами Ли последовал целый ряд исследований (в том числе уже цитированная диссертация Д. Ф. Егорова), содержавших попытки построения аналогичной теории для уравнений второго порядка. Однако ни на пути, указанном С. Ли, ни на каком ином, из числа разрабатываемых математиками того времени, построение общей теории, сравнимой

по результатам с теорией уравнений первого порядка, достигнуто не было.

К началу XX столетия в теории уравнений с частными производными 2-го порядка сложилась следующая ситуация: продолжались попытки имевшимися в наличии методами в рамках традиционных теорий построить общую теорию таких уравнений. Однако серьёзных успехов в этом направлении достичь не удавалось. В то же самое время в трудах ряда математиков уже формировался взгляд на теорию уравнений в частных производных как на теорию краевых задач. Последняя же, развивавшаяся до сих пор внутри математической физики, обладала богатым арсеналом результатов и методов (классические результаты Гаусса, Римана, Дирихле, Шварца, К. Неймана, Пикара, Пуанкаре, Дюбуа Реймона и др.). Постановка тех или иных краевых задач для различных видов уравнений математической физики диктовалась простыми физическими соображениями. И когда появилась фундаментальная классификация уравнений по типам (1889), то уже для каждого из них имелись свои, созданные в математической физике, виды краевых задач.

С появлением у Ж. Адамара (1917) понятия корректности краевой задачи замкнулся тот основной круг вопросов, в пределах которого развивалась в дальнейшем теория краевых задач.

Когда в конце 60-ых гг. перед сегодняшним лектором встал вопрос – какими вопросами заняться после защиты кандидатской диссертации ? – для него было ясно, что это должны быть вопросы истории теории дифференциальных уравнений с частными производными, в которую он уже основательно погрузился.

Какие это должны быть вопросы ? Историей теории краевых задач для таких уравнений успешно занимались в ту пору многочисленные исследователи, преимущественно в нашей стране. (Интерес к ним на Западе в 60-е годы только пробуждался !) Входить в эту группу, испытывая естественные в такой ситуации осложнения, не хотелось. Поэтому он избрал историю общей геометрической теории, на которую никто тогда не посягал. Тем более, что она не казалась в ту пору перспективной. Как мы понимаем сегодня, по этому вопросу в самой теории дифференциальных уравнений тогда наметился крутой поворот. Ему способствовали импульсы, идущие из приложений (из физики !), а также возросшие возможности математического аппарата, ещё вчера демонстрировавшего свою неспособность решать такие задачи. Однако возможность такого поворота ощущали тогда очень немногие специалисты в области дифференциальных уравнений. До лиц, занимавшихся историей, весть о подобном повороте докатилась, как обычно, с большим опозданием.

Уравнения с частными призводными 1-го порядка
Работы Эйлера

Историю дифф. уравнений с частными производными, как мы уже видели, вплоть до недавнего времени, было принято начинать с работы Эйлера «Дополнение к рассуждению о бесконечном количестве кривых одного и того же рода» (Comment. Acad. Sci. Petrop. VII (1734/35). 1740. P. 184 – 200) опубликованной

в 1740 г., которая, как видно даже из самого ее названия, относится к геометрии, точнее, к геометрии так называемых изогональных траекторий. Традиция возводить историю уравнений с частными производными к указанной работе Л. Эйлера восходит к концу XVIII в., в частности к Ж. А. Кузену, который выдвинул соответствую-

щий тезис в противовес господствовавшему тогда мнению, связывавшему начало теории с работами Даламбера 40-ых гг.,– мнению, к которому сегодня вернулись. Работа же Эйлера 1740 г. пред-

ставляет лишь предысторию исследований новой области: занимаясь геометрическими задачами, Л. Эйлер встретился с дифференциальными уравнениями с частными производными, не придав, судя по всему, должного значения открывшимся перед ним объектам. Интуитивно ощущая нетривиальный их смысл, он уделил им больше внимания, чем это требовала приведшая к ним задача. Однако соответствующая часть работы, мало связанная с рассматриваемыми геометрическими задачами, не приобрела и самостоятельного значения; открывшийся впоследствии смысл ее не был ясен даже самому автору, тем более его современникам. Лишь потом, задним числом, об этих результатах вспомнили его последователи, пытаясь (и, как мы видим, успешно) утвердить его приоритет.

Попробую обосновать это заключение, рассмотрев соответствующую работу Эйлера 1740 г. (см. ИМИ, 1975, вып. 20, с. 204 – 220), то есть статью «Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis» (Дополнение к рассуждению о бесконечном количестве кривых одного и того же рода), опубликованную в 1740 г. в 7 томе Записок Императорской Петербургской Академии наук (Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae) за 1734 – 1735 гг. В начале статьи

речь идет о следующей задаче: пусть в выражении дифференциала функции z

$$dz = P(x, a)\,dx + Q(x, a)\,da \tag{9}$$

задана функция $P(x, a)$, требуется найти функцию $Q(x, a)$, т. е. в наших обозначениях задано уравнение

$$\partial z/\partial x = P(x, a),$$

требуется определить $\partial z/\partial a$. Исходя из условия, что (9) — полный дифференциал $\left(\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, Эйлер получил

$$Q = \int \frac{\partial P(x, a)}{\partial a}\,dx. \tag{10}$$

Если этот интеграл можно вычислить, то поставленная задача решена, но если этот интеграл не берется, нельзя ли все же определить Q хотя бы как функцию x, a и z? Эйлер приводит пример, когда такое определение возможно без интегрирования: пусть функция $z(x, a)$ — однародная степени 0, тогда по известному свойству однородных функций имеет место равенство

$$P(x, a)\,x + Q(x, a)\,a = 0;$$

следовательно,

$$Q = -Px/a. \tag{11а}$$

Эйлер обращает задачу: известно, что

$$Q = -Px/a,$$

определить наиболее общий вид P. Выражение (9) с учетом (11а) принимает вид

$$dz = P\left(dx - \frac{x\,da}{a}\right).$$

Отметив, что P является множителем, делающим последнее выражение интегрируемым, Эйлер замечает, что в качестве P можно взять любую функцию вида

$$\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a} + c\right), \tag{11б}$$

тогда

$$dz = f\left(\frac{x}{a} + c\right) d\left(\frac{x}{a} + c\right)$$

и

$$z = \int f\left(\frac{x}{a} + c\right) d\left(\frac{x}{a} + c\right).$$

У Эйлера это выражение отсутствует, и у него окончательным является выражение (11б) для P.

С современной точки зрения равенство (11а) — уравнение с частными производными вида

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{x}{a}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{11в}$$

а $z = \int f\left(\frac{x}{a} + c\right) d\left(\frac{x}{a} + c\right)$ — его решение. Для Эйлера (11а) — соотношение, связывающее P и Q, из которого, выяснив наиболее общий возможный вид функции $P\left(=\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a} + c\right)\right)$, мы находим Q при условии, что заданное P имеет соответствующий вид (например, $P = \frac{1}{a} e^{\frac{x}{a} + 2}$). Таким образом, результат Эйлера таков: если $P(x, a) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a} + c\right)$, то $Q(x, a) = -\frac{Px}{a} = -\frac{x}{a^2} f\left(\frac{x}{a} + c\right)$.

Эйлер замечает, что в качестве функций $P(x, a)$ и $Q(x, a)$ можно взять более общие выражения: $X(x) + \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ и $A(a) - \frac{x}{a^2} f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ соответственно ($X(x)$, $A(a)$ — произвольные функции).

Далее Эйлер начинает усложнять тип зависимости между $P(x, a)$ и $Q(x, a)$. Пусть

$$Q = -nPx/a, \tag{12а}$$

где n — некоторое число, тогда рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к выражению для

$$P = \frac{1}{a^n} f\left(\frac{x}{a^n} + c\right), \tag{12б}$$

а следовательно, и для

$$Q = -\frac{nx}{a^{n+1}} f\left(\frac{x}{a^{n+1}} + c\right):$$

С современной точки зрения равенство (11а) — уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{nx}{a}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{12в}$$

а $z = \int P(x, a)\,dx + \int Q(x, a)\,da$ — общее решение этого уравнения. Для Эйлера это соотношение, из которого он находит наиболее общее выражение для $P(x, a)$ и которое позволяет, зная $P(x, a)$, найти $Q(x, a)$, не прибегая к интегрированию (10). Таким образом, если $P(x, a)$ задано в форме (12б), то сразу можно записать $Q(x, a)$ по формуле (12а).

Здесь, как и в предыдущем случае, Эйлер замечает, что для P и Q можно взять более общие выражения, прибавив к найденным какие угодно функции, зависящие только от x для P и только от a для Q.

Далее Эйлер рассматривает случай Q = P E(a), где E(a) – некоторая функция от a.

Далее он усложняет тип зависимости между P(x, a) и Q (x, a). В итоге можно составить таблицу из трёх столбцов (Эйлер этого не делает) – в первом поместим рассматриваемые Эйлером зависимости между P и Q, во втором – найденные им выражения для P, в третьем – соответствующие зависимости из первого столбца, записанные в современных обозначениях:

1. $Q = -\frac{Px}{a}$ (11а)	$\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ (11б)	$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{\partial z}{\partial x}\frac{x}{a}$ (11в)
2. $Q = -\frac{nPx}{a}$ (12а) (n — число)	$\frac{1}{a^n} f\left(\frac{x}{a^n} + c\right)$ (12б)	$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{nx}{a}\frac{\partial z}{\partial x}$ (12в)
3. $Q = P \cdot E(a)$, (13а) где $E(a)$ — функция a	$f(x + A(a))$, (13б) где $A(a) = \int E(a)\,da$	$\frac{\partial z}{\partial a} = E(a)\frac{\partial z}{\partial x}$ (13в)
4. $Q = PY(x)$, (14а) где $Y(x)$ — функция x	$\frac{1}{Y(x)} f(X(x) + a)$, (14б) где $X(x) = \int \frac{dx}{Y(x)}$	$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x} Y(x)$ (14в)
5. $Q = PE(a)\,Y(x)$,	$dX(x)$ [illegible]	∂z [illegible] ∂z [illegible]

С нашей точки зрения, выражения (11а), (12а), (13а) и т.д. являются дифференциальными уравнениями первого порядка (11в), (12в), (13в) и т.д., а развиваемые Эйлером методы достаточны для построения решений этих уравнений. Однако в постановке задачи интегрирования дифференциального уравнения с частными производными и той задачи, которую ставил перед собой Л. Эйлер, имеется различие. Его задача — по заданному P, если оно имеет вид (11б) — (20б) (при соответствующем выборе функции f), найти, не прибегая к интегрированию (10), по формулам (11а) — (20а) выражения для Q. Особенно отчетливо различие в этих двух подходах ощущается, когда Эйлер переходит к рассмотрению выражений, которые мы могли бы трактовать как уравнения порядка, большего двух.

Итак, в рассмотренной работе Эйлера, написанной в связи с геометрическими задачами, содержатся первые ростки теории уравнений с частными производными. Строго говоря, можно говорить лишь об одном уравнении - $\partial z/\partial x = P(x,a)$, для которого ставится задача нахождения не z, но $\partial z/\partial a$.

Все остальные выражения, которые с нашей точки зрения можно трактовать как дифференциальные уравнения с частными производными первого, второго и третьего порядков, имеют смысл совершенно отличный от нашего.

Таким образом, усматривать в этой работе начало теории уравнений с частными производными, на мой взгляд, соверешенно неправомерно.

Своё начало эта теория берёт в работах Ж. Даламбера, к рассмотрению которых мы и переходим.