

Демидов С.С.

**История математического анализа в XVII – XX вв.
Избранные главы:**

***Из истории теории дифференциальных
уравнений с частными производными***

Осенний семестр 2023 г.

Лекция 9

Построенная Ли общая теория уравнений первого порядка представляет собой вершину исследований в области классической теории уравнений первого порядка XIX в. Она до конца реализовала темы, развитые или хотя бы только затронутые исследователями на протяжении более чем ста лет интенсивной разработки этой области анализа. Изложенная во втором томе «Теории групп преобразований», написанном С. Ли в сотрудничестве с Ф. Энгелем, в ряде монографий (из которых отметим изложение Э. Гурса (Goursat E. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. 2 éd. Paris. 1921) и обзоров (например, Э. Вебера в немецкой математической энциклопедии – Weber E. Partielle Differentialgleichungen / Encykl. Math. Wiss. Bd. II₁. H. 2 – 3), эта теория стала одним из самых замечательных достижений математики XIX века.

Вслед за работами по уравнениям первого порядка С. Ли начал аналогичные разработки для уравнений второго порядка. Совокупность его результатов по уравнениям с частными производными открывала целое направление исследований по общей геометрии-

ческой теории таких уравнений (Э. Картан, Ж. Драш и др.).

В этом русле написана и магистерская диссертация Д.Ф. Егорова «Уравнения с частными производными второго порядка по двум независимым переменным. Общая теория интегралов // Уч. Зап. Московского ун-та. Отд. Физ.-мат. 1899. Вып. 15. В ней Егоров развивает идеи Ли в теории уравнений второго порядка.

Работы Егорова (1869–1931) по геометрической теории уравнений с частными производными в последние годы вновь оказались в центре внимания специалистов. К этим работам мы ещё вернёмся.



Д.Ф. Егоров (1869 – 1931)

- 1869 – родился в Москве в семье учителя математики
- 1891 – окончил Московский университет с дипломом 1-й степени
- 1894 – приват-доцент Московского университета
- 1899 – защитил магистерскую диссертацию
- 1901 – докт. диссертация «О классах геометр. преобразований»
- 1902 – 03 – командировка в Германию и Францию
- 1903 – э.о. проф. Моск. Ун-та (1909 – ординарный профессор)
- 1910 – начал вести ежегодный математический семинар
- 1921 – основан НИИ матем. и механ. МУ (с 24 г.–директор НИИ)
- 1923 – президент Московского математического общества
- 1924 – член-корреспондент АН СССР
- 1927 – 1-й Всероссийский съезд математиков
- 1929 – почётный член АН СССР
 - изгнание с поста директора НИИ математики и механики
- 1930 – арест по делу Всесоюзной контрреволюционной монархической организации «Истинно-православная церковь»
- 1931 – умер в ссылке в Казани

Нижний Новгород 1893 г.



**В.К. Серпинский Д.Ф. Егоров
Н.Н. Лузин**



Московские высшие женские курсы
Д.Ф. Егоров С.А. Чаплыгин А.И. Реформатский И.И. Жегалкин



Президиум 1-го Всероссийского съезда математиков



Могила Д.Ф. Егорова на Арском кладбище в Казани



Д.Ф. Егоров и имеславие в России

<Схимонах Иларион> На горах Кавказа. Беседа двух старцев пустынников о внутреннем единении с Господом наших сердец через молитву Иисус Христову. В трёх частях. Составил пустынный Кавказских гор, лесов и ущелий. Баталпашинск. Тип. Л.Я. Кочка. 1907.

И. Антоний (А.К. Булатович) Апология веры в Божественность Имён Божиих и Имени «Иисус». Св. Гора. 1912.

1912 – 1913 – Имеславческие споры в среде русских монахов на Афоне

1913 апрель – осуждение имеславцев патриархом Константинопольским
май – осуждение имеславцев Синодом Русской церкви

1913 июнь – июль – русский «десант» на Святую Гору

1914 февраль – Николай II принимает депутацию монахов-имеславцев

1914 май – резолюция Московской синодальной конторы

1914 август – Россия вступает в Первую мировую войну

1917 август – 1918 сентябрь – Собор Русской Православной Церкви
отец Сергей (Булгаков)

Демидов С.С. Профессор Московского университета Дмитрий Фёдорович Егоров и имеславие в России в первой трети XX столетия // Историко-математические исследования. 2-я серия. Вып. 4 (39). 1999. С. 123 – 155.

В последней трети XX века исследования по геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными развивались в рамках теории дифференцируемых многообразий. Современные инвариантные (не зависящие от выбора координат) определения дифференциальных уравнений с частными производными и их решений связываются с введёнными Ш. Эресманом пространствами джетов (или струй) (см. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия: Сводка результатов. М.: Мир. 1975). Уравнения с частными

производными первого порядка трактуется тогда как замкнутое подмногообразие коразмерности 1 E многообразия $J^1(M)$ 1-джетов гладких функций на многообразии M (см. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1986). Под решением такого уравнения понимается

гладкое подмногообразие, лежащее на уравнении E и обращающее в нуль некоторую универсальную $U_1 \in \Lambda^1(J^1_M)$ 1-форму. Поставленная А. М. Виноградовым

(ДАН СССР 1973. **210**. № 1. С. 11 – 14) задача классификации нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными была решена для уравнений 1-го порядка В.В. Лычагиным

(Лычагин В.В. Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // ДАН СССР. 1973. 210. № 3

Лычагин В.В. Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Автореф. Дисс. М., МИЭМ, 1973).

В этом случае она сводилась к классификации ростков гиперповерхностей в $J^1(M)$ относительно группы контактных диффеоморфизмов.

(См. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1986)

Александр Михайлович Виноградов



1938 – родился в Новороссийске в семье учёного-гидравлика и врача; его прадед А.З. Смагин (1859 – 1932?), крестьянин-самоучка, сельский просветитель, был избран от партии кадетов депутатом Гос. Думы Российской Империи 2 созыва

1955 – поступил на мех-мат МГУ

1960 – аспирант

1964 – защитил канд. дисс. по алгебр. топологии

1965 – сотрудник каф. высшей геометрии и топологии мех-мата МГУ

1984 – защитил докт. диссертацию в Ин-те математики СО АН СССР

1993 – проф. ун-та в Салерно (Италия)

2019 – умер в Лиццано ин Бельведере (Италия)

Области исследований – дифференциальное исчисление над коммутат. алгебрами, алгебр. теории лин. диф. операторов гомолог. алгебры, диф. геометрии, и алгебр. топологии, механики и математической физики, геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений и вторичного дифференциального исчисления.

В прочитанных лекциях исследования по теории урав-

нений с частными производными первого порядка рассматриваются как процесс постепенного постижения комплекса идей, составляющих ту скрытую ее сущность, которая открылась в работах С. Ли 70-х годов XIX в. Процесс этот протекал в несколько этапов, каждый из которых характеризовался преимущественным развитием некоторых из этих идей, рассматриваемых в частных (с точки зрения последующих этапов) аспектах. Разумеется, преимущественное развитие идей, характеризующих этап, не означает, что в то же время на периферии области исследований не происходит движение других идей, подготавливающее почву для одного из последующих этапов.

Мы выделяем четыре периода истории теории уравнений первого порядка в XVIII—XIX вв.

Первый период развития исследований в области таких уравнений, связанный почти исключительно с именами Л. Эйлера и Ж. Даламбера, заканчивается в конце 60-х — в начале 70-х гг. Он характеризуется прежде всего тем, что для интегрирования использовались прие-

мы, являющиеся спецификациями метода множителей, при этом уравнения записывались в виде выражений в полных дифференциалах (такая форма записи была тесно связана с употреблением метода множителей). Эти приемы носили формально-аналитический характер и были лишены какой-либо геометрической интерпретации — по этой причине мы называли весь этот период *формально-аналитическим*. Созревшая в рамках этого периода в исследованиях Ж. Лагранжа новая концепция полного решения положила начало следующему этапу развития исследований.

Второй период (начало 70-х гг. XVIII в. — 30-е гг. XIX в.) характеризуется в первую очередь развитием идей «теории Ж. Лагранжа». Основными действующими лицами были, кроме самого Лагранжа, Г. Монж, развивший геометрический аспект «теории», а также И. Ф. Пфаф, О. Коши и К. Г. Якоби, в основных чертах завершившие программу исследований, заложенную в теории Лагранжа.

Исследования К.Г. Якоби по так называемому «второму методу Якоби», составившие основное содержание

следующего, *третьего периода*, продолжавшегося до конца 60-х гг. XIX в., были вызваны запросами аналитической динамики, тесная связь которой с этой областью математики была установлена У. Р. Гамильтоном и развита К. Г. Якоби.

Несколько методов интегрирования, глубинные связи между которыми угадываются, ряд результатов, полученных на периферии области исследований и не укладывающихся в рамки установленных теорий (в частности, умножившиеся примеры использования преобразований, названных впоследствии контактными для интегрирования уравнений первого порядка), — все это требовало осмысления с единой точки зрения, наличие которой смутно ощущалось в конце 60-х гг. Эту единую точку зрения вы-

явила построенная в начале 70-х гг. Софусом Ли «общая теория», составившая содержание четвертого периода исследований. Предпосылки «теории Ли» складывались на протяжении предыдущих периодов развития исследований, а основанием ей послужили общие геометрические воззрения, формирование которых пришлось как раз на эти годы и в значительной степени связано с именами Ф. Клейна и самого С. Ли. В «теории С. Ли» получили свое завершение и полное выражение идеи, составляющие скрытый нерв области исследований уравнений с частными производными первого порядка. С точки зрения этой теории методы и понятия, развиваемые предшествующими авторами, становятся частями единого целого, а не скоплением плохо связанных между собой, а подчас и изолированных фрагментов.

Каждый из выделенных нами этапов развития исследований заканчивается, когда получают достаточно полное выражение идеи, составляющие основное содержание этапа. Стимулом для начала интенсивной разработки идей, развитие которых характеризует следующий этап, могут служить как внутренние, так и внешние по отношению к области исследований факторы. К числу внутренних можно отнести такие, как необходимость осмыслить некоторые результаты, не укладывающиеся в рамки прежних представлений (концепция «полного» решения, послужившая исходной точкой построения «теории Лагранжа», широкое применение для интегрирования уравнений преобразований Лежандра и Ампера и им подобных, явившихся исходными для формирования понятия контакт-

ного преобразования — одного из центральных в «теории Ли»); интуитивно ощущаемая потребность в синтезе ранее развитых идей (как это было перед созданием С. Ли его общей «теории»).

Возможно развитие математической теории, определяемое исключительно внутренними факторами, однако в нашем случае внешние факторы, в первую очередь аналитическая механика, оказались мощными стимуляторами роста; в их отсутствие, надо полагать, развитие теории не было бы столь интенсивным. Аналитическая механика оказала решающее воздействие на исследования в самый момент их возникновения (работы Даламбера по аэродинамике и теории колебаний) и продолжала его оказывать на протяжении всего процесса их развития (это относится, в частности, ко «второму методу» Якоби).