Демидов С.С.

История математического анализа в XVII – XX вв.
Избранные главы:

Из истории теории дифференциальных уравнений с частными производными

Осенний семестр 2023 г.

Лекции 7 – 8

Итак мы рассмотрели развитие теории дифференциальных уравнений с частными производными со времени её зарождения в работах Л. Эйлера и Ж. Даламбера вплоть до исследований К.Г. Якоби середины XIX столетия. Она распадается на три периода.

Первый период развития исследований в области таких уравнений, связанный почти исключительно с именами Л. Эйлера и Ж. Даламбера, заканчивается в конце 60-х — в начале 70-х гг. Он характеризуется прежде всего тем, что для интегрирования использовались приемы, являющиеся спецификациями метода множителей, при этом уравнения записывались в виде выражений в полных дифференциалах (такая форма записи была тесно связана с употреблением метода множителей). Эти приемы носили формально-аналитический характер и были лишены какой-либо геометрической интерпретации — по этой причине мы назвали весь этот период *формально-аналитическим*. Созревшая в рамках этого периода в исследованиях Ж. Лагранжа новая концепция полного решения положила начало следующему этапу развития исследований.

Второй период (начало 70-х гг. XVIII в.— 30-е гг. XIX в.) характеризуется в первую очередь развитием идей *«теории Ж. Лагранжа»*. Основными действующими лицами были, кроме самого Лагранжа, Г. Монж, развивший геометрический аспект «теории», а также И. Ф. Пфафф, О. Коши и К. Г. Якоби, в основных чертах завершившие программу исследований, заложенную в теории Лагранжа.

Исследования К. Г. Якоби по так называемому *«второму методу Якоби»*, составившие основное содержание следующего, *третьего периода*, продолжавшегося до конца 60-х гг. XIX в., были вызваны запросами аналитической динамики, тесная связь которой с этой областью математики была установлена У. Р. Гамильтоном и развита К. Г. Якоби.

Несколько методов интегрирования, глубинные связи между которыми угадываются, ряд результатов, полученных на периферии области исследований и не укладывающихся в рамки установленных теорий (в частности, умножившиеся примеры использования преобразований, названных впоследствии контактными для интегрирования уравнений первого порядка),— все это требовало осмысления с единой точки зрения, наличие которой смутно ощущалось в конце 60-х гг. Эту единую точку зрения выявила построенная в начале 70-х гг. Софусом Ли «*общая теория*», составившая содержание *четвертого периода* исследований. Предпосылки «теории Ли» складывались на протяжении предыдущих периодов развития исследований, а основанием ей послужили общие геометрические воззрения, формирование которых пришлось как раз на эти годы и в значительной степени связано с именами Ф. Клейна и самого С. Ли.

На 1820-ые годы приходится рождение неевклидовой геометрии и начинается ломка представлений о геометрии как науке, основания которой вычитаны из свойств физического пространства, а потому её аксиомы незыблемы. Растёт интерес к аксиоматике, прежде всего аксиоматике геометрии. Одним из средств исследования аксиоматических теорий (аксиоматики неевклидовой геометрии) становятся их интерпретация в рамках других более надёжных теорий (евклидовой геометрии). Одну из таких интерпретаций предложил в 1871 году сам Феликс Клейн. Мало-помалу начало расти понимание необходимости различать феномены окружающего нас мира и их математические модели даже в тех случаях, когда эти модели рождались непосредственно из наблюдений самих феноменов. Постепенно (и с немалыми трудами) начала приобретать в математике права гражданства концепция многомерного пространства. Желающих ознакомиться с этой историей мы отсылаем, например, к очерку Б.А. Розенфельда в книге «Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций» (М.: Наука. 1981;76 – 96). Мы только отметим несколько любопытных, с нашей точки зрения, её моментов.

Принятию в математике идеи многомерного пространства препятствовали трудности мировоззренческого характера. Вот как писал об этом Ф. Клейн: «И тут опять [как и в случае с неевклидовой геометрией] помехой на пути развития этих целей явились философы; эти последним не хватало понимания того имманентного значения, которое присуще математическим теориям…Но, кроме сопротивления со стороны философов, утверждающих…, что n-мерное пространство есть бессмыслица, возникла ещё одна неожиданная трудность, как раз противоположного характера. Появились философы-энтузиасты, которые из существования и плодотворности математической теории сделали вывод о существовании некоего действительного четырёхмерного пространства, существующего в природе, откуда и возникла, по их мнению, возможность экспериментального доказательства его существования». Речь здесь идёт об астрономе и физике Ф. Цёльнере и американском спирите Г. Слэйде, пытавшихся найти в идее четырёхмерного пространства научное основание спиритизму.

Однако, математики даже, по существу, принимающие концепцию n-мерного пространства (Г. Грассман, Л. Шлефли, Б. Риман), избегали самого термина, прибегали к своеобразной терминологии: вместо слова «пространство» говорили «протяжение», «тотальность», многообразие», а вместо слова «точка» – «решение» или «состояние», вообще избегая использования слова «геометрия» применительно к многомерной геометрии. К концу XIX столетия обычная геометрическая терминология в геометрии n-мерных пространств становилась привычной.

Применительно к изучаемому нами вопросу – к развитию геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка – важную роль сыграл своеобразный подход к понятию многомерного пространства, предложенный немецким математиком и физиком Ю. Плюккером (1801 – 1868). В своей книге «Система аналитической геометрии в пространстве в новой аналитической трактовке» (Бонн, 1846) он предложил рассматривать в качестве основного элемента обычного трёхмерного пространства не точки, а прямые, многообразие которых четырёхмерно. Свою идею он развил в двухтомной «Новой геометрии пространства, основанной на рассмотрении прямой как элемента пространства», первый том которой был издан в 1868, а второй вышел в 1869 – после его смерти. В его подготовке к печати принимал участие его ученик и ассистент Ф. Клейн.

Выбор нового пространственного элемента, предложенный С. Ли и речь о котором ещё впереди, как неоднократно указывал он сам, был конкретизацией плюккеровских идей к рассматриваемой им ситуации (подробнее в: Демидов С.С. К истории теории С. Ли дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. Вып. 23. 1978. С. 87 – 117).

Выбор нового пространственного элемента, рассмотрение многообразия таких элементов и основанное на этом обобщение понятия уравнения и понятия решения уравнения, стали одними из главных положений новой теории С. Ли, о которой пойдёт речь. Другим важнейшим её элементом станет идея контактных преобразований.

К понятию контактного преобразования, как мы уже говорили, вплотную подошёл Якоби.

Независимо от результатов Якоби к идее контактного преобразования подводили две линии развития математики XIX в.: 1) практика интегрирования дифференциальных уравнений — об отдельных результатах Эйлера, Лагранжа, Лиувилля и Ампера мы уже упоминали, назовем также работы А. де Моргана (1849), книгу П. Дюбуа Реймона о геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными (1864) — и 2) геометрические исследования Монжа (1809), М. Шаля (1837) и в особенности работы Ю. Плюккера (1831), к которым, по выражению С. Ли и Энгеля, «нужно добавить очень немного, чтобы получить исходную точку для геометрической теории контактных преобразований на плоскости»

(Lie S. (unter Mitwirkung von F. Engel) Theorie der Transformationsgruppen. Bd.2. Leipzig. 1890). К таким преобразованиям на рубеже 60—70-х годов пришел также Г. Дарбу, как он позже сам указывал в письмах к С. Ли; впрочем, Дарбу не опубликовал своевременно своих результатов. Так что идея контактных преобразований к концу 60-х годов потенциально присутствовала в математике, хотя ее действительная реализация произошла в начале 70-х годов в работах С. Ли.

К концу 60-х годов созрели все предпосылки для создания «общей теории». Дело оставалось за «малым» — за выработкой геометрических воззрений чрезвычайной общности. Такие воззрения, явившиеся результатом революционных сдвигов в геометрии XIX в., были достигнуты к началу 70-х гг. двумя молодыми математиками Ф. Клейном и С. Ли, второй из которых является главным действующим лицом следующего этапа развития исследований в области дифференциальных уравнений первого порядка.

Софус Ли (S. Lie; 1842 – 1899)

1842 – родился в Нордфьордейде в семье пастора
1865 – окончил университет в Христиании
1870 – поездка в Берлин и Париж
начало дружбы с Ф. Клейном
1870 – 71 – франко-прусская война
1871 – д-р филос. («О классах геометрических преобразований»)
1872 – профессор университета в Христиании
1884 – приезд Ф. Энгеля
1886 – 98 – профессор университета в Лейпциге
1888 – 1893 – выход в свет «Theorie der Transformationsgruppen»
Bd. 1 – 3.
1897 – премия Н.И. Лобачевского
1898 – возвращение в Христианию
1899 – умер в Христиании

Член Академии наук Франции (1892), Лондонского королевского общества (1895), член-корреспондент Петербургской АН (1896)

Необычайная творческая сила сочеталась у С. Ли с пристальным вниманием к работам предшественников. Читая многочисленные исторические замечания, разбросанные в основном тексте и сносках его работ, в его письмах, многие из которых приводятся в примечаниях к собранию его сочинений, не перестаешь удивляться глубине проникновения С. Ли в идеи его предшественников. Он превосходно знал работы Эйлера, Лагранжа, Монжа, Пфаффа, Гамильтона, Плюккера и Якоби по теории уравнений первого порядка и аналитической динамике. При этом его изучение этих работ происходило одновременно и в глубокой связи с развитием общих геометрических воззрений. Таким образом, в данном случае можно говорить о действительном синтезе идей, выраженных в той или иной форме, иногда только намеченных, в ходе более чем векового развития исследований в области уравнений с частными производными, на базе новых геометрических воззрений.

В 1871 – 72 гг. появились первые работы Ли, развивающие идею контактного преобразования – короткая заметка на норвежском языке, подписанная 24 октября 1870 г. (Christ.(1870) 1871), затем более полное изложение (Christ. (1871) 1872) также по-норвежски, наконец, немецкая статья «Über Komplexe» (Math. Ann. Bd. 5. H. 1. 1872). В 1873 г. (подписано 30 апреля 1872 г.) появляется «Короткое резюме нескольких новых теорий» (Christ.(1872) 1873) по-немецки, где в очень сжатой форме даётся набросок развиваемой им теории уравнений первого порядка. Несколько ранее появляется работа «Теория дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка» (Gött. Nachr. № 25. 1872), подписанная 11 октября 1872 г., содержащая формулировку (без доказательства) одного из важнейших предложений новой «теории» – решения проблемы локальной эквивалентности для уравнений 1-го порядка. В дельнейшие годы последовал цикл исследований Ли, развивающих новую «теорию», которые подытоживаются во втором томе (1890) знаменитого сочинения

С. Ли «Theorie der Transformationsgruppen», подготовленного им совместно с Ф. Энгелем.

Выбор нового пространственного элемента

Обыкновенно дифференциальные уравнения с частными производными 1-го порядка с тремя независимыми переменными

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

и их решения геометрически интерпретировались в трехмерном координатном пространстве $\mathbf{R}^3$. С. Ли счел более удобным для своих целей изучать такие уравнения в связи с пространством $\mathbf{R}^5$, рассматривая набор (x, y, z, p, q) как точку такого пространства. Согласно воззрениям того времени, правда, речь шла не о двух разных пространствах $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{R}^5$, а об одном и том же пространстве, в котором в первом случае в качестве элемента пространства выбрана точка (x, y, z), а во втором — точка (x, y, z) и проходящая через нее плоскость, характеризующаяся числами p, q — координатами вектора $(p, q, -1)$, перпендикулярного плоскости.

Таким образом, переход от $\boldsymbol{R}^3$ к $\boldsymbol{R}^5$ трактовался как выбор нового пространственного элемента.

Обобщение пространственного элемента С. Ли стало конкретизацией плюккеровской идеи к ситуации, возникающей в связи с дифференциальными уравнениями с частными производными 1-го порядка.

Для уравнений 1-го порядка в случае *n* независимых переменных Софус Ли привлекает к рассмотрению идею многомерного пространства, развитую Г. Грассманом в 1844 г. в «Учении о протяжении». Он рассматривает *(n + 1)*-мерное пространство $\boldsymbol{R}^{n+1}$ и полагает в нём в качестве элемента совокупность из точки $(z, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и проходящей через неё плоскости, определяемой *n* числами $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - координатами вектора $(p_1, p_2, \ldots, p_n, -1)$ перпендикулярного к этой гиперплоскости (т. е. переходит к пространству $\mathbf{R}^{2n+1}$). Каждый выбранный таким образом элемент пространства характеризуется $(2n + 1)$ координатами $(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$. С. Ли изучает многообразия (Mannigfaltigkeit) этих элементов. (Разумеется, понятие многообразия не определяется аккуратно, как сегодня, но понимается оно по существу также.) Тогда уравнение

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{1}$$

задает многообразие размерности $2n$ (обозначается у С. Ли M_{2n}) в пространстве элементов $(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ размерности $2n + 1$.

Понятие решения уравнения

Выбор пространствен-
ного элемента, сделанный Ли, позволил ему по-новому определить решение дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Прежде всего новый смысл приобрело выражение

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = 0. \qquad (2)$$

Если раньше оно служило для определения частных производных от z, то теперь оно означало условие связи между двумя бесконечно близкими элементами (z, x_i, p_i) и $(z + dz, x_i + dx_i, p_i)$ — условие соединенного положения
(vereinigten Lage) обоих соседних элементов.

Оно означает, что точка $(z + dz, x_i + dx_i)$ лежит в гиперплоскости

$$\mathfrak{z} - z = p_1(\mathfrak{x}_1 - x_1) + \ldots + p_n(\mathfrak{x}_n - x_n)$$

элемента (z, x_i, p_i).

Интегральным многообразием (Integralmannigfaltigkeit) уравнения (1) называется по Ли любое многообразие n измерений $M_n \subseteq M_{2n}$, элементы которого удовлетворяют уравнению (1) и условию соединенного положения (2).

Под многообразием M_n Ли здесь понимает подмногообразие в M_{2n}, задаваемое соотношениями

$$z = z(t_1, t_2, \ldots, t_n), \quad x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$
$$p_i = p_i(t_1, t_2, \ldots, t_n), \ (i = 1, \ldots, n).$$

Второе условие означает тогда, что задана некоторая связь между дифференциалами от $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Таким образом проинтегрировать уравнение (1) по Софусу Ли означает: из многообразия M_{2n}, определяемого уравнением (1), выделить все подмногообразия M_n, элементы которых удовлетворяют уравнению (2).

Такая трактовка уравнений первого порядка и их решений открывает новую эпоху в геометрической теории таких уравнений, переводя вопрос в сферу геометрии дифференцируемых многообразий, и открывая тем самым чрезвычайно плодотворное направление исследований не ослабевающее до настоящего времени. (См., например, Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1986.)

ослабевающее до настоящего времени».

Если полученное так многообразие является точечным многообразием M_n в пространстве $(z, x_1, \dots, x_n)$, которое можно выразить уравнением $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то мы получим решение уравнения в классическом смысле. Однако, новое понятие включает в себя образования, которые ранее не рассматривались как решения. Так например, в случае уравнения $\partial z/\partial x = 0$ (z — функция x, y) прямая $z = \text{const}$, $y = \text{const}$ и множество проходящих через нее плоскостей дают многообразие, являющееся решением уравнения. Другой пример нестандартного решения этого уравнения дает точка $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ со множеством всех проходящих через нее плоскостей. Такое расширение понятия решения позволяет внести ясность в некоторые вопросы теории и придать всей теории удивительную стройность.

Согласно классической точке зрения уравнение (1) только тогда можно рассматривать как дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, когда в него входит явным образом хотя бы одна из величин p_i. С точки зрения С. Ли, «уравнявшего в правах» координаты z, x_i и p_i, это совершенно необязательно и уравнение $F(x, y, z) = 0$, в частности $z = 0$, является таким же объектом его теории. Для уравнения $z = 0$ мы сразу можем указать его решения:

Решения уравнения $z = 0$:

1. Многообразие M_2 элементов, составленных из точек плоскости и проходящей через них плоскости $z = 0$.

2. Многообразие M_2 элементов, составленных из точек кривой $\varphi(x, y) = 0$, $z = 0$, лежащей в плоскости $z = 0$, и множества плоскостей касательных к этой кривой в этой точке.

3. Многообразие M_2 элементов, составленных из одной и той же точки плоскости и множества всех проходящих через неё плоскостей. (Подобный пример С. Ли затрагивает в письме А. Майеру от 3.1.1873.)

Следующим важным моментом в «теории Ли» стало введение понятия контактного преобразования. Использование таких преобразований для интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными имело богатую историю, связанную с именами Л. Эйлера, А. Лежандра, А. Ампера, К. Якоби, В.Г. Имшенецкого. Так Эйлер, интегрируя уравнение $pq = 1$, (Интегральное исчисление. Т. 3. Задача 12) использовал преобразование $x_1 = p$, $y_1 = y$, $z_1 = z - px$, $p_1 = -x$, $q_1 = q$, являющееся контактным. Лежандр использовал специальное преобразование («преобразование Лежандра»), являющееся контактным, для интегрирования уравнения минимальных поверхностей.

Контактные преобразования

Контактным преобразованием С. Ли называл преобразование в $\mathbf{R}^5$:

$$x' = x'(x, y, z, p, q), \qquad y' = y'(x, y, z, p, q),$$

$$z' = z'(x, y, z, p, q),$$

$$p' = p'(x, y, z, p, q), \qquad q' = q'(x, y, z, p, q),$$

при котором тождественно удовлетворялось соотношение $dz' - p'dx' - q'dy' = \rho\,(dz - pdx - qdy)$, где ρ — функция z, x, y, p, q, зависящая от преобразования. Инвариантным свойством такого преобразования является касание. Классические преобразования Лежандра и Ампера представляли собой примеры таких преобразований.

Одним из первых вопросов, возникающих в связи с введенными таким образом контактными преобразованиями, является проблема эквивалентности, т. е. проблема возможности сведéния одного уравнения к другому посредством таких преобразований. Этот вопрос был поставлен

Ли в одной из его первых работ ((Christ. Forh. (1872) 1873. S. 24 – 27), подписанной 30 мая 1872 года, и в принципе решён в работе (Gött. Nachr. № 25. 1872. S. 473 – 489), подписанной 11 октября того же года: существует контактное преобразование, которое преобразует данное уравнение в любое наперёд заданное, в частности в уравнение $z = 0$. Таким образом, из этого простейшего уравнения можно вы́читать всю теорию уравнений первого порядка!

Всё это мы уже практически сделали выше – на 20 слайде. Вот описание интегральных многообразий уравнения $z = 0$:

1. Многообразие M_2 элементов, составленных из точек плоскости $z = 0$ и проходящей через них плоскости $z = 0$ – даёт особый интеграл.

2. Многообразие M_2 элементов, составленных из точек кривой $\varphi(x, y) = 0$, $z = 0$, лежащей в плоскости $z = 0$, и множества плоскостей касательных к этой кривой в этой точке – даёт общий интеграл.

3. Многообразие M_2 элементов, составленных из одной и той же точки плоскости и множества всех проходящих через неё плоскостей – даёт полный интеграл.

Данное Ли решение проблемы эквивалентности с современных позиций выглядит неудовлетворительным. Во-первых, не отмечен локальный характер полученного результата — следовало бы говорить о возможности установления изоморфизма посредством контактного преобразования некоторой окрестности точки многообразия $f(x, y, z, p, q) = 0$ и некоторой окрестности произвольной точки другого многообразия $f_1(x', y', z', p', q') = 0$. Во-вторых, не указапо то обстоятельство, что такое преобразование невозможно в окрестности нерегулярных точек (необходимое условие нерегулярности $p^2 + q^2 = 0$). Что касается первого замечания, то не может быть никакого сомнения в том, что Ли был ясен локальный характер его результата, чего он ни здесь, ни в других подобных слу-

чаях не считал нужным оговаривать.

следует отнести скорее к общей для математиков XIX в. манере формулировать результаты, верные «в общем случае», игнорируя их невыполнение в некоторых отдельных особых случаях. Так и здесь, как нетрудно показать, нерегулярные точки составляют па многообразии $f(x, y, z, p, q) = 0$ замкнутое подмножество меньшего числа измерений, и результат С. Ли оказывается верным «почти всегда», т. е. в «общем случае».

Значительное развитие в новой теории получает теория характеристик и характеристических многообразий, общая теория которых позволила Ли разработать метод, частными случаями которого являются методы Коши и второй метод Якоби. В новой теории оказалось возможным сделать еще более прозрачной связь между проблемами динамики и уравнениями первого порядка, существенную роль при этом сыграло введенное С. Ли понятие бесконечно малых преобразований.

Понятие бесконечно малых преобразований мы оставим за пределами нашего курса. Более подробное изложение, рассматриваемых сегодня вопросов можно найти в:

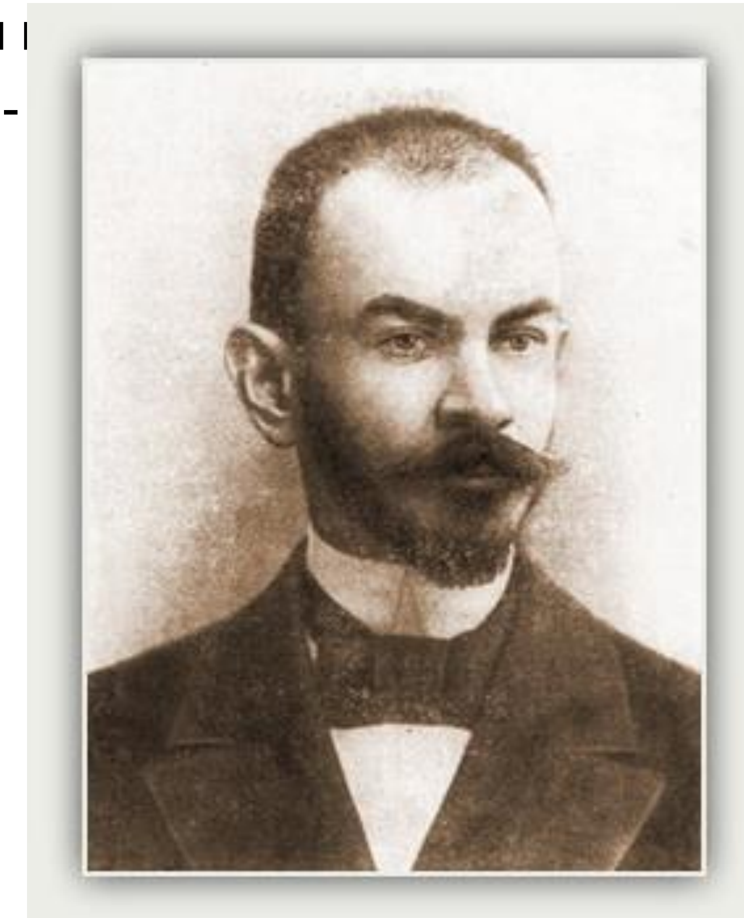
Демидов С.С. К истории теории С.Ли дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. Вып. 23. 1978. С. 87 – 117.

Демидов С.С. Развитие исследований по уравнениям с частными производными первого порядка в XVIII – XIX вв. // Историко-математические исследования. Вып. 25. 1980. С. 71 – 103.

Построенная Ли общая теория уравнений первого порядка представляет собой вершину исследований в области классической теории уравнений первого порядка XIX в. Она до конца реализовала темы, развитые или хотя бы только затронутые исследователями на протяжении более чем ста лет интенсивной разработки этой области анализа. Изложенная во втором томе «Теории групп преобразований», написанном С. Ли в сотрудничестве с Ф. Энгелем, в ряде монографий (из которых отметим изложение Э. Гурса (Goursat E. Leçons sur l'integration des équations aux dérivées partielles du premièr ordre. 2 éd. Paris. 1921) и обзоров (например, Э. Вебера в немецкой математической энциклопедии – Weber E. Partielle Differentialgleichungen / Encykl. Math. Wiss. Bd. $II_1 . H. 2 \ - 3$), эта теория стала одним из самых замечательных достижений математики XIX века.

Вслед за работами по уравнениям первого порядка С. Ли начал аналогичные разработки для уравнений второго порядка. Совокупность его результатов по уравнениям с частными производными открывала целое направление исследований по общей геометрической теории таких уравнений (Э. Картан и др.).

В этом русле написана и докторская диссертация Д.Ф. Егорова «Уравнения с частными производными второго порядка по двум независимым переменным. Общая теория интегралов // Уч. Зап. Московского ун-та. Отд. Физ.-мат. 1899. Вып. 15. В ней Егоров развивает идеи Ли в теории уравнений



Работы Егорова (1869 – 1931)по геометрической теории уравнений с частными производными в последние годы вновь оказались в центре внимания специалистов. К этим работам мы ещё вернёмся.

Д.Ф. Егоров (1869 – 1931)

1869 – родился в Москве в семье учителя математики

1891 – окончил Московский университет с дипломом 1-й степени

1894 – приват-доцент Московского университета

1899 – защитил магистерскую диссертацию

1901 – докт. диссертация «О классах геометр. преобразований»

1902 – 03 – командировка в Германию и Францию

1903 – э.о. проф. Моск. Ун-та (1909 – ординарный профессор)

1910 – начал вести ежегодный математический семинар

1921 – основан НИИ матем. и механ. МУ (с 24 г.–директор НИИ)

1923 – президент Московского математического общества

1924 – член-корреспондент АН

1927 – 1-й Всероссийский съезд математиков

1929 – почётный член АН СССР

– изгнание с поста директора НИИ математики и механики

1930 – арест по делу Всесоюзной контрреволюционной монархической организации «Истинно-православная церковь»

1931 – умер в Казани

В последней трети XX века исследования по геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными развивались в рамках теории дифференцируемых многообразий.

Современные инвариантные (не зависящие от выбора координат) определения дифференциальных уравнений с частными производными и их решений связываются с введёнными Ш. Эресманом пространствами джетов (или струй) (см. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия: Сводка результатов. М.: Мир. 1975). Уравнения с частными производными первого порядка трактуется тогда как замкнутое подмногообразие коразмерности 1 E многообразия $J^1(M)$ 1-джетов гладких функций на многообразии M (см. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1986). Под решением такого уравнения понимается гладкое подмногообразие, лежащее на уравнении E и обращающее в нуль некоторую универсальную $U_1 \in \Lambda^1(J^1_M)$ 1-форму. Поставленная А. М. Виноградовым

(ДАН СССР 1973. **210**. № 1. С. 11 – 14) задача классификации нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными была решена для уравнений 1-го порядка В.В. Лычагиным

(Лычагин В.В. Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // ДАН СССР. 1973. 210. № 3

Лычагин В.В. Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Автореф. Дисс. М., МИЭМ, 1973).

В этом случае она сводилась к классификации ростков гиперповерхностей в $J^1(M)$ относительно группы контактных диффеоморфизмов.

(См. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1986)

Александр Михайлович Виноградов

1938 – родился в Новороссийске в семье
учёного-гидравлика

1955 – поступил на мех-мат МГУ

1960 – аспирант, рук. Б.Н. Делоне

1964 – защитил канд. дисс. по алг.топологии

1965 – сотрудник каф. высш.геом. и топол.

1984 – защитил докт. дисс.

1993 – проф. ун-та в Салерно (Италия)

2019 – умер в Лиццано ин Бельведере

Заключение

В прочитанных лекциях исследования по теории уравнений с частными производными первого порядка рассматриваются как процесс постепенного постижения комплекса идей, составляющих ту скрытую ее сущность, которая открылась в работах С. Ли 70-х годов XIX в. Процесс этот протекал в несколько этапов, каждый из которых характеризовался преимущественным развитием некоторых из этих идей, рассматриваемых в частных (с точки зрения последующих этапов) аспектах. Разумеется, преимущественное развитие идей, характеризующих этап, не означает, что в то же время на периферии области исследований не происходит движение других идей, подготавливающее почву для одного из последующих этапов.

Мы выделяем четыре периода истории теории уравнений первого порядка в XVIII—XIX вв.

Первый период развития исследований в области таких уравнений, связанный почти исключительно с именами Л. Эйлера и Ж. Даламбера, заканчивается в конце 60-х — в начале 70-х гг. Он характеризуется прежде всего тем, что для интегрирования использовались приемы, являющиеся спецификациями метода множителей, при этом уравнения записывались в виде выражений в полных дифференциалах (такая форма записи была тесно связана с употреблением метода множителей). Эти приемы носили формально-аналитический характер и были лишены какой-либо геометрической интерпретации — по этой причине мы назвали весь этот период *формально-аналитическим*. Созревшая в рамках этого периода в исследованиях Ж. Лагранжа новая концепция полного решения положила начало следующему этапу развития исследований.

Второй период (начало 70-х гг. XVIII в.— 30-е гг. XIX в.) характеризуется в первую очередь развитием идей *«теории Ж. Лагранжа»*. Основными действующими лицами были, кроме самого Лагранжа, Г. Монж, развивший геометрический аспект «теории», а также И. Ф. Пфафф, О. Коши и К. Г. Якоби, в основных чертах завершившие программу исследований, заложенную в теории Лагранжа.

Исследования К.Г. Якоби по так называемому «*второму методу Якоби*», составившие основное содержание

следующего, *третьего периода*, продолжавшегося до конца 60-х гг. XIX в., были вызваны запросами аналитической динамики, тесная связь которой с этой областью математики была установлена У. Р. Гамильтоном и развита К. Г. Якоби.

Несколько методов интегрирования, глубинные связи между которыми угадываются, ряд результатов, полученных на периферии области исследований и не укладывающихся в рамки установленных теорий (в частности, умножившиеся примеры использования преобразований, названных впоследствии контактными для интегрирования уравнений первого порядка),— все это требовало осмысления с единой точки зрения, наличие которой смутно ощущалось в конце 60-х гг. Эту единую точку зрения выявила построенная в начале 70-х гг. Софусом Ли «*общая теория*», составившая содержание *четвертого периода* исследований. Предпосылки «теории Ли» складывались на протяжении предыдущих периодов развития исследований, а основанием ей послужили общие геометрические воззрения, формирование которых пришлось как раз на эти годы и в значительной степени связано с именами Ф. Клейна и самого С. Ли. В «теории С. Ли» получили свое завершение и полное выражение идеи, составляющие скрытый нерв области исследований уравнений с частными производными первого порядка. С точки зрения этой теории методы и понятия, развиваемые предшествующими авторами, становятся частями единого целого, а не скоплением плохо связанных между собой, а подчас и изолированных фрагментов.

Каждый из выделенных нами этапов развития исследований заканчивается, когда получают достаточно полное выражение идеи, составляющие основное содержание этапа. Стимулом для начала интенсивной разработки идей, развитие которых характеризует следующий этап, могут служить как внутренние, так и внешние по отношению к области исследований факторы. К числу внутренних можно отнести такие, как необходимость осмыслить некоторые результаты, не укладывающиеся в рамки прежних представлений (концепция «полного» решения, послужившая исходной точкой построения «теории Лагранжа», широкое применение для интегрирования уравнений преобразований Лежандра и Ампера и им подобных, явившихся исходными для формирования понятия контактного преобразования — одного из центральных в «теории Ли»); интуитивно ощущаемая потребность в синтезе ранее развитых идей (как это было перед созданием С. Ли его общей «теории»).

Возможно развитие математической теории, определяемое исключительно внутренними факторами, однако в нашем случае внешние факторы, в первую очередь аналитическая механика, оказались мощными стимуляторами роста; в их отсутствие, надо полагать, развитие теории не было бы столь интенсивным. Аналитическая механика оказала решающее воздействие на исследования в самый момент их возникновения (работы Даламбера по аэродинамике и теории колебаний) и продолжала его оказывать на протяжении всего процесса их развития (это относится, в частности, ко «второму методу» Якоби).