Демидов С.С.

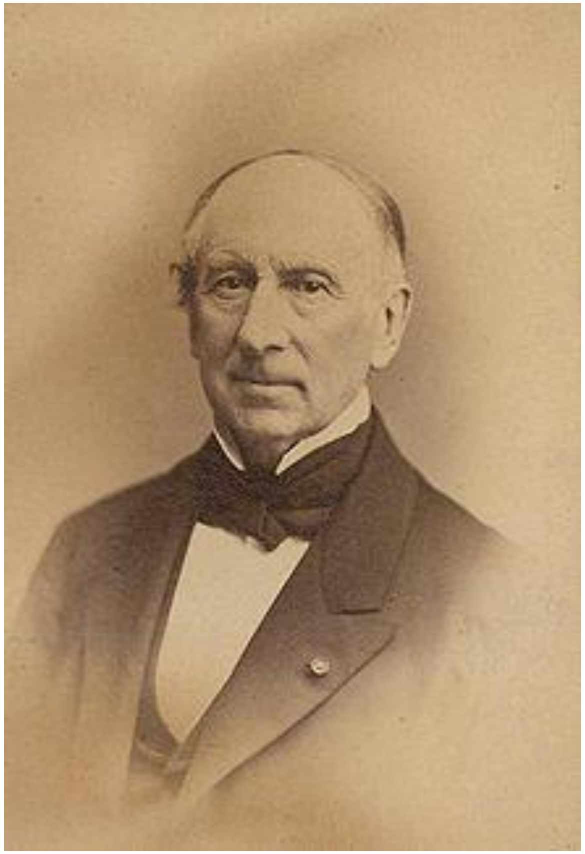
История математического анализа в XVII – XX вв.
Избранные главы:

Из истории теории дифференциальных уравнений с частными производными

Осенний семестр 2023 г.

Лекция 6

О.Л. Коши (A.L. Cauchy; 1789 – 1857)



1789 – родился в Париже

1807 – окончил Политехническую школу

1810 – окончил Школу мостов и дорог

1810 – 13 – работал инженером в порту
в Шербуре

с 1816 – назначен членом АН вместо
изгнанного Г. Монжа
проф. Политехнической школы и
Сорбонны

1821 – выход «Алгебраического анализа»

1830 – 1838 – эмиграция (Турин, Прага и
др.)

1831 – член Петербургской АН

в числе его учеников М.В. Остроградский,
В.Я. Буняковский

1857 – умер в Париже

Сложная политическая обстановка

в Европе в то время мало способствовала развитию научных связей. Результаты И. Ф. Пфаффа не стали вовремя известными О. Коши, занятому поиском метода интегри-

рования уравнения

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$$

в случае произвольного n .

Работа И. Ф. Пфаффа дошла до него лишь в тот момент, когда он готовил публикацию своих результатов. Но «так как речь идет об одном из самых важных вопросов интегрального исчисления и так как метод господина Пфаффа отличен от моего», — писал О. Коши в начале

своей статьи (Bull. Soc. Philomat. 1819), то он, Коши, полагает, что изложение предсталяет интерес для геометров.

Своё изложение Коши проводит для случаев двух и трёх независимых переменных, указывая, что распространение метода на случай большего их числа не представляет трудности.

Так, для двух независимых переменных предложенная конструкция выглядит следующим образом:
ищется решение уравнения

$$f(x, y, z, p, q) = 0\,, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию $z(x_0, y) = \varphi(y)$. Если x, y, z рассматри-

вать как функции 2-х переменных,то задача интегр.ур-ния (1)пред-
ставляется как задача нахождения пяти функций x, y, z, p, q этих двух переменных, удовлетворяющих этому уравнению и соотношению

$$dz - pdx - qdy = 0. \tag{2}$$

Коши использует замену переменных, предложенную Ампером в 1815 г.: $\quad x = x,\ y = y(u, x). \quad (3)$

В силу (2) и (3) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + q\frac{\partial y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = q\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{4}$$

Дифференцируя (1) последовательно по *x* и по *u* и обозначая

$$X = \partial f/\partial x, \quad Y = \partial f/\partial y, \quad Z = \partial f/\partial z, \quad P = \partial f/\partial p, \quad Q = \partial f/\partial q,$$

получаем

$$X + Y\frac{\partial y}{\partial x} + Z\frac{\partial z}{\partial x} + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad (5)$$

$$Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u} + P\frac{\partial p}{\partial u} + Q\frac{\partial q}{\partial u} = 0.$$

Задача сводится теперь к нахождению функций x, y, z, p, q переменных x и u, удовлетворяющих уравнениям (4) и (5). В дальнейшем Коши пытается подобрать функцию u так, чтобы из уравнений (4) и (5) получить систему из четырёх уравнений, содержащих только производную по x (но не по u). Он приходит к системе

$$P\frac{\partial y}{\partial x} = Q, \qquad P\frac{\partial z}{\partial x} = Pp + Qq, \qquad P\frac{\partial q}{\partial x} = -Y - qZ,$$

$$P\frac{\partial p}{\partial x} = -X - pZ,$$

которая совпадает с системой, достигаемой методом Лагранжа-Шарпи. Интегрирование этой системы при начальных условиях $(x_0, u, \varphi(u), p(x_0, u), \varphi'(u))$ даёт искомое решение.

Метод Коши сводит таким образом интегрирование уравнения (1) к интегрированию одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а не n систем, как в методе Пфаффа. При этом Коши предлагает конструкцию интегральной поверхности из характеристик (самого этого термина он не употребляет), проходящих через кривую $x = x_0$, $z = \varphi(y)$, давая тем самым дальнейшее развитие теории характеристик, начало которой было положено Монжем. Однако работа Коши не получила в свое время достаточной известности, ибо напечатана была в журнале, не имевшем широкого распространения. Не знал об этой работе и К. Г. Якоби, пришедший к тому же результату, в несколько отличной, правда, форме, получившей в литературе название первого метода

Якоби. Впоследствии, в 1841 г., Коши воспроизвёл основное содержание своей работы в статье, опубликованной в Exerc. anal. et phys. math. (nouv. exerc.). T. 2. Paris.1841. Подробнее об этом см. в Демидов С.С. К истории теории уравнений с частными производными первого порядка – работы И.Ф. Пфаффа и О. Коши // Историко-математич. исследования. Вып. 24. 1979. С.191 – 217.

К.Г. Якоби (C.G. Jacobi; 1804 – 1851)

1804 – родился в Потсдаме

1825 – окончил Берлинский университет
доктор философии

1825 – 26 – прив.-доцент Берлинского ун-та

1826 – 42 – проф. Кёнигсбергского ун-та

1836 – избран в Берлинскую Академию наук

1842 – переезд в Берлин

1851 – скончался в Берлине от оспы

Автор замечательных результатов в различных областях математики, превосходный педагог (его ученики – Гессе, Клебш и др.). Член Парижской АН (чл.-корр. 1830; член 1833), Лондонского корол. о-ва (1833).

Член Петербургской АН (чл.-корр.1830; член 1833).

Родной брат российского физика акад. Б.С. Якоби

Первый метод Якоби

В ст.1837 г. (J.reine und angew.Math. V.17) Якоби пришёл к мысли – использовать при выборе первой из замен координат, проводимых согласно методу Пфаффа, идею «начальных значений», находившуюся в тесной связи с работами У. Гамильтона 1834—1835 гг., которые были в эти годы объектом тщательнейшего его изучения и отправной точкой собственных исследований по аналитической механике. Он

рассматривает уравнение $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ (6)

и, следуя методу Пфаф-фа, записывает для него систему уравнений

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{P_1p_1 + P_2p_2 + \dots + P_np_n} =$$

$$= \frac{-dp_1}{X_1 + Zp_1} = \dots = \frac{-dp_n}{X_n + Zp_n}, \qquad (7)$$

где

$$P_i = \partial f/\partial p_i, \qquad X_i = \partial f/\partial x_i, \qquad Z = \partial f/\partial z,$$

интегрирование которой даёт систему из $2n$ независимых интегралов

$$
\begin{aligned}
&u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_1,\\
&u_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{2n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = a_{2n-1},\\
&f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0.
\end{aligned}
$$

Далее $u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1}, z$ принимаются за новые переменные. С этого момента начинаются различия в методе Пфаффа и методе, получившем в литературе название «первого метода» Якоби. Якоби использует идею начальных значений, стоящую, как мы уже говорили, в связи с его изучением работ У. Р. Гамильтона: пусть

$$x_i\big|_{z=0} = \xi_i, \qquad p_i\big|_{z=0} = \pi_i.$$

Введенные таким образом ξ_i и π_i являются функциями $u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1}$, а следовательно, $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Затем Якоби устанавливает, что $-dz + p_1 dx_1 + \ldots$ $\ldots + p_n\, dx_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n-1} p_i \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j$ и далее (следствие замечательной идеи введения «начальных значений»!).

$$-dz + p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n + 0 \cdot dp_1 + \ldots$$
$$\ldots + 0 \cdot dp_{n-1} = \pi_1 d\xi_1 + \pi_2 d\xi_2 + \ldots + \pi_n d\xi_n.$$

Таким образом, одной замены оказалось достаточным для редукции уравнения в полных дифференциалах, содержащего $2n$ переменных, к уравнению, содержащему всего лишь n переменных. Тотчас получалось решение исходного уравнения (6) в виде полного решения, получаемого исключением $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из системы

$$\xi_i(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$f(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

В лекциях, прочитанных в 1842/43 г. в Кёнигсбергском университете (опубликованных уже после его смерти Клебшем (Jacobi C.G. Vorlesungen über Dynamik. Berlin.1866 / Якоби К.Г. Лекции по диамике. М.-Л. 1936), Якоби дал другое изложение своего метода, стоящее ближе к идеям Гамильтона.

В работах Пфаффа, Коши и Якоби основная задача теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, стоявшая в начале века, была решена, и «теория Лагранжа» в центральной своей части приобрела законченную форму, что знаменовало собой окончание второго этапа исследований области уравнений первого порядка. Разумеется, в рамках «теории Лагранжа» имелось еще множество задач более частного характера, развитые методы требовали уточнения и допускали значительное расширение, реализация которого выходила за рамки задач, диктуемых «теорией Лагранжа». Метод Пфаффа, по существу, выводя рассмотрения в пространство $2n$ измерений, где к числу независимых переменных относились и частные производные от искомой функции, не укладывался, как мы уже отмечали, в рамки принятой геометрической интерпретации теории. Метод Коши намечал дальнейшее развитие теории характеристик уравнений первого порядка. Наконец, Якоби ставил теорию уравнений первого порядка в неразрывную связь с такими интенсивно развивающимися областями исследований, как аналитическая механика и вариационное исчисление. Множились случаи использования для интегрирования уравнений отдельных преобразований (Ж. Лагранж, А. Лежандр, А. Ампер), названных впоследствии контактными и позволивших в 1870-е годы Софусу Ли построить общую геометрическую теорию уравнений первого порядка (об этом мы ещё поговорим в последующих лекциях). Отсутствие понимания геометрического смысла таких преобразований, ненужное при формально-аналитической трактовке вопроса, вытесняло их применение на периферию исследований.

Мы видим, что наличные исследования обладали внутренними потенциями для дальнейшего развития, но, вероятно, оно не было бы столь бурным, как это произошло в дальнейшем, если бы не мощный импульс — из области аналитической механики.

Дело в том, что в рамках теории Гамильтона — Якоби, как показал сам Якоби, удавалось свести задачу интегрирования уравнений динамики к нахождению полного решения одного уравнения с частными производными первого порядка (что устанавливало тесную связь аналитической динамики с уравнениями с частными производными первого порядка!). Правда, такой результат сам по себе не дает практической выгоды, ибо интегрирование этого уравнения согласно известным методам опять сводилось к полному интегрированию системы обыкновенных уравнений, которая оказывалась эквивалентной исходной системе уравнений динамики. Получился замкнутый круг, выход из которого дал принципиально новый метод интегрирования уравнений первого порядка, именно так называемый второй метод Якоби. Соответствующие результаты Якоби составили следующий, третий этап ее развития.

Второй метод Якоби

Перед Якоби стояла задача – найти метод интегрирования уравнения (6), принципиально отличный от предложенного им ранее, не сводящий задачу к проблеме полного интегрирования системы (7). Для случая двух независимых перемен-

ных такой метод — метод Лагранжа — Шарпи — уже существовал. Обобщение же этого метода на случай большего числа переменных наталкивалось, как мы уже говорили, на серьезное затруднение. «Это затруднение удерживало до сих пор аналитиков от распространения метода Лагранжа на большее число переменных. Нас оно не устрашит, напротив, зная априори, что задача, несмотря на слишком большое число условий, все же может быть решена, мы будем исследовать — как это может произойти, что $(n-1)$ функция удовлетворяет $n(n-1)/2$ услов-

ным уравнениям», – такими словами Якоби предварял изложение

метода, поиски которого он вел давно. Еще в работе, датированной 12 августа 1827 г. и опубликованной в том же году, он писал, что «имеют смысл условия, направленные на распространение до возможных границ метода Лагран-

жа» (Лекции, с. 10). Такое обобщение метода на уравнения с произвольным числом независимых переменных содержится в статье, законченной Якоби в 1838 г. и найденной Клебшем в его бумагах уже после его смерти, последовавшей в 1851 г. Эта статья была опубликована в 1862 г. (J.reine und angew.Math. Bd. 60). Содержащийся в ней «второй метод» Якоби был приведён также в его лекциях по динамике.

Суть второго метода К. Г. Якоби сводится к следующему. Пусть

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = h_i$$

(где h_i — произвольные постоянные) — искомые $(n-1)$ соотношения, из которых, взятых вместе с исходным уравнением

$$f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

(к такому виду без труда приводится уравнение (6), можно извлечь $p_1, \ldots, p_n$ как функции $x_1, x_2, \ldots$
$\ldots, x_n$, при любых значениях констант $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$

обращающие

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n$$

в полный дифференциал.

Тогда интегрирование выражения

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n$$

даст искомый полный интеграл, зависящий от произвольных постоянных $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ и постоянной интегрирования h_n.

Якоби показывает, что необходимым и достаточным условием того, чтобы $p_1, p_2, \ldots, p_n$, извлеченные из системы

$$f_0 = 0, \quad f_i = h_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

обращали $p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots p_n dx_n$ в полный дифференциал, будет тождественное удовлетворение равенств

$$(f_i f_k) = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_l} \frac{\partial f_k}{\partial p_l} - \frac{\partial f_i}{\partial p_l} \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \right) = 0 \qquad \text{(IV.1.2)}$$

$$(i, k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

($(f_i f_k)$ — скобки Пуассона, введенные им в 1809 г.). Таким образом задача сводится к нахождению функций $f_1, f_2, \ldots$

$\ldots, f_{n-1}$, удовлетворяющих условиям

$$(f_0 f_1) = 0, \tag{8-1}$$

$$\left.\begin{aligned}(f_0 f_2) &= 0,\\ (f_1 f_2) &= 0,\end{aligned}\right\} \tag{8-2}$$

$$\left.\begin{aligned}(f_0 f_3) &= 0,\\ (f_1 f_3) &= 0,\\ (f_2 f_3) &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{8-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned}(f_0 f_{n-1}) &= 0,\\ (f_1 f_{n-1}) &= 0,\\ &\cdots\cdots\\ (f_{n-2} f_{n-1}) &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{8-$n-1$}$$

Так как f_0 известно, то уравнение (8-1) – линейное и первого порядка относительно функции f_1 . Найдя частное решение этого уравнения, включающее p_i, можно приступить к решению системы (8-2) двух линейных уравнений первого порядка относительно f_2 и т.д.

Задача свелась к решению системы совокупных линейных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$A^1(f) = A_1^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2^1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + A_n^1 \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^k(f) = A_1^k \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2^k \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + A_n^k \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

($k < n$), удовлетворяющих условию (Якоби доказывает это)

$$A^k(A^l(f)) - A^l(A^k(f)) = 0.$$

При этом достаточно найти одно решение такой системы, включающее p_i. Якоби дает простой метод нахождения таких решений и тем самым получает новый метод интегрирования уравнения $f_0(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$, а следовательно и (6). Этот метод открывал целое направление исследований – изучение совокупных систем уравнений такого типа.

Глубокое проникновение в идеи своих предшественников (Лагранжа, Пфаффа), неразрывность в исследовании структур математического анализа и аналитической механики, не только способствовавшая достижению важных результатов в последней, но и обогащавшая сам анализ (вспомним хотя бы использование идеи «начальных значений» в создании «первого метода»), наконец, исключительная широта взгляда, включавшего в рассмотрение самые разнообразные аспекты теории, позволили Якоби настолько продвинуться в исследовании области уравнений первого порядка, что он вплотную подошел к идеям, составившим впоследствии содержание «теории С. Ли». Судя по его лекциям по динамике, а также по опубликованным посмертно в 1862 и 1890 годах работам, Якоби вплотную приблизился к идее контактного преобразования как ключевого момента в построении теории дифференциальных уравнений первого порядка. Он характеризовал подобные преобразования как самые общие преобразования дифференциальных уравнений первого порядка и дал им общее аналитическое представление (наиболее полное изложение соответствующих результатов Якоби мы находим в: Jacobi C.G. Gesammelte Werke. Bd. 5. 1890). Подробнее об этом см.: Демидов С.С. К истории теории С. Ли дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. Вып. 23. 1978. С. 87 – 117. От законченного понятия контактного преобразования Якоби отделял всего один шаг — выявление общегеометрического смысла таких преобразований, который он сам рассматривал *исключительно* в связи с уравнениями. Фактическое же употребление им контактных преобразований подводило его к необходимости рассматривать уравнения, напр. $f_0(x_1, x_2, \dots, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$, не в связи с $\mathbf{R}^{n+1}$, а с $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Таким образом, в работах Якоби содержатся все предпосылки для создания «общей теории уравнений первого порядка», созданной впоследствии С. Ли, не хватает одного — синтезирующего геометрического взгляда на теорию, подготавливавшегося всем ходом развития математики XIX в. и оформившегося лишь к 70-м годам.

К сожалению, работы Якоби, рассмотренные в настоящем разделе, как мы уже отмечали, не были своевременно опубликованы. Некоторые содержащиеся в них результаты стали известны европейским математикам через сообщения лиц, слушавших его курс в Кёнигсберге (К. В. Борхардта и др.), из писем самого Якоби (одно из них было опубликовано в 1840 г. в V томе журнала Лиувилля). Однако в целом полученные им результаты по теории уравнений первого порядка и тесно связанные с ними достижения по динамике долгое время оставались неизвестными и частично были переоткрыты другими авторами (М. В. Остроградским, Ж. Бертраном, Ж. Лиувиллем, Э. Буром, В. Ф. Донкиным и др.)

В 50-е – 60-е годы рассмотренные результаты Якоби в значительной своей части были опубликованы и сразу привлекли внимание ряда математиков. Их изучение рождало ощущение необходимости выработки новой точки зрения, позволяющей дать ясное в идейном отношении их представление как частей единого целого, глубже понять их взаимосвязи со старыми теориями (Лагранжа, Пфаффа, Коши). Этим чувством окрашены высказывания Ж. Бертрана в его курсах, читанных в Париже в начале 60-х годов, которые побудили молодого математика из России В. Г. Имшенецкого написать магистерскую диссертацию «Об интегрировании уравнений с частными производными первого порядка», опубликованную в Казани в 1865 г. и уже в 1869 г. появившуюся во французском переводе

Эта монография, содержащая некоторые собственные достижения автора, явилась образцовым изложением основных результатов (в первую очередь Якоби), достигнутых к тому времени. Однако она не содержала в себе подхода к решению основной задачи — построению «общей теории», осуществленному через несколько лет С. Ли. Более того, в книге Имшенецкого отсутствовали те математические достижения, которые послужили предпосылками формирования новой теории: 1) выбор нового пространственного элемента, рассмотрение многообразия таких элементов и основанное на этом обобщение понятия уравнения и решения уравнения; 2) идея контактных преобразований.

Имшенецкий В.Г. (1832 – 1892)

1832 – родился в семье врача Ижевского оружейного завода

1853 – окончил Казанский университет

1862 – 1864 – командирован в Париж, где слушал лекции Ламе, Серре и Бертрана

1865 – магист. дисс.«Об интегрировании уравнений с частными производ. 1-го пор.» (франц. перевод Ж. Гюэля – 1869)

1868 – докт.дисс.«Исследование способов интегр.уравн. с част. производ. 2-го пор.» (франц. перевод Ж. Гюэля – 1872; нем. перевод – 1892)

– профессор Казанского ун-та

1872 – профессор Харьковского ун-та

1881 – избран в Петербургскую АН

1892 – умер в Москве