Демидов С.С.

История математического анализа в XVII – XX вв. Избранные главы:

Из истории теории дифференциальных уравнений с частными производными

Осенний семестр 2023 г.

Лекция 5

Уравнения с частными призводными 1-го порядка
Работы Даламбера и Эйлера

Историю дифф. уравнений с частными производными зачастую начинают с работы Эйлера «Дополнение к рассуждению о бесконечном количестве кривых одного и того же рода» (Comment. Acad. Sci. Petrop. VII (1734/35). 1740. P. 184 – 200) опубликованной

в 1740 г., которая, как видно даже из самого ее названия, относится к геометрии, точнее, к геометрии так называемых изогональных траекторий. Традиция возводить историю уравнений с частными производными к указанной работе Л. Эйлера восходит к концу XVIII в., в частности к Ж. А. Кузену, который выдвинул соответствую-

щий тезис в противовес господствовавшему тогда мнению, связывавшему начало теории с работами Даламбера 40-ых гг., – мнению, которое разделяю и я – об этом я уже говорил в предшествующих лекциях. Указанная выше работа Эйлера со-

ставляет лишь предысторию исследований новой области: занимаясь геометрическими задачами, Л. Эйлер встретился с дифференциальными уравнениями с частными производными, не придав, судя по всему, должного значения открывшимся перед ним объектам. Интуитивно ощущая нетривиальный их смысл, он уделил им больше внимания, чем это требовала приведшая к ним задача. Однако соответствующая часть работы, мало связанная с рассматриваемыми геометрическими задачами, не приобрела и самостоятельного значения; открывшийся впоследствии смысл ее не был ясен даже самому автору, тем более его современникам. Лишь потом, задним числом, об этих результатах вспомнили его последователи, пытаясь (и, как мы видим, успешно) утвердить его приоритет.

В 40-е годы Даламбер вывел ряд уравнений математической физики: в 1743 г. «Трактате по динамике», в 1747 г. в «Размышлениях о природе ветров», наконец в статье, опубликованной в 1749 г. – уравнение колебания струны. Если в трактате 1743 г. уравнение приводится в форме $\frac{dp}{dt} = \mathrm{q} - (\mathrm{l} - \mathrm{s})\frac{dq}{ds}$, где $p = \frac{dy}{dt}, \mathrm{q} = \frac{dy}{ds}$, близкой к современной, то в работах 1747 и 1749 гг. уравнения записываются в виде выражений в полных дифференциалах. Это различие объясняется в предложенном им методе интегрирования уравнений – методе множителей (в трактате 1743 г. проинтегрировать написанное выше уравнение Даламбер ещё не умел). Этот метод можно охарактеризовать следующим образом: из дифференциальных соотношений , являющихся полными дифференциалами, образуют линейные комбинации с числовыми или функциональными коэффициентами с тем расчетом, чтобы подходящими заменами координат и входящих в выражения неизвестных функций можно было получить интегрируемые выражения.

Именно в упомянутых работах Даламбера уравнения с частными производными были осознаны как предмет новой области исследований; была поставлена задача их решения так, как мы понимаем ее сегодня; наконец, были предложены первые методы их интегрирования. Эти работы сразу обратили на себя внимание крупнейших математиков того времени, возбудили интерес самого Эйлера к новой области анализа (и заставили его вспомнить собственные исследования, явившиеся первым, правда неосознанным, в неё проникновением): сразу после появления работы Ж. Даламбера, содержащей вывод уравнения колебания струны и построение его решения, Эйлер предлагает свою модификацию метода Даламбера и свои соображения о природе полученного решения. С этого момента начинаются многолетние его исследования по теории дифференциальных уравнений с частными производными, ведущиеся в соперничестве с Даламбером. Творчество этих двух выдающихся математиков и составляет основное содержание начального периода истории изучения дифференциальных уравнений с частными производными, в частности уравнений первого порядка.

Новая область анализа давала значительный простор исследователю, ее методы оказывались незаменимыми для решения ряда задач механики и вызывали широкий интерес. Но под силу эта новая область анализа оказывается немногим — на протяжении всего XVIII в. она оставалась самой сложной для исследователей ветвью анализа.

Основное внимание в первое время было сосредоточено на интегрировании уравнений второго порядка, ибо именно они были необходимы механике — дисциплине, определявшей лицо науки XVIII в. Однако и уравнения первого порядка вскоре стали предметом пристального внимания творцов нового исчисления, ибо систематическое развитие общей теории уравнений с частными производными, стремление к которому ощущается в работах Даламбера и Эйлера 60-х гг., естественно требовало прежде всего ее построения для уравнений первого порядка. Главные достижения в теории уравнений первого порядка содержат работы: Эйлера «Разыскание функции по данному дифференциальному условию», опубликованная в 1764 (представленные в ней результаты содержатся в 3-м томе его «Интегрального исчисления» (1770), и «Исследования по интегральному исчислению» (1768) Даламбера.

В этих работах уравнения с частными производными приводятся к уравнениям в полных дифференциалах, которые решаются той или иной спецификацией метода множителей. Проиллюстрируем этот метод на примере 21-й задачи VI главы III тома «Интегрального исчисления»

Требуется проинтегрировать уравнение

$$px + qy = 0 \qquad (p = {}^{\partial z}/_{\partial x}, q = {}^{\partial z}/_{\partial y}).$$

Эйлер переходит к соответствующему уравнению в полных дифференциалах

$$dz = pdx + qdy = pdx - \frac{px}{y}dy = p\left(dx - \frac{x}{y}dy\right).$$

Он замечает, что интегрирующим множителем выражения

$dx - \frac{x}{y}dy$ будет $\frac{1}{y}$, тогда $dz = py\left(\frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2}dy\right) = pyd\left(\frac{x}{y}\right)$,

следовательно, py – функция $\frac{x}{y}$, тогда $py = f'\left(\frac{x}{y}\right)$ и

$z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ $(f(t)$ – произвольная функция своего аргумента).

Этот пример — иллюстрация начала исследований, для которых характерно, во-первых, сведе́ние уравнений с частными производными к уравнениям в полных дифференциалах, что сохраняло связь с уже «обжитой» областью обыкновенных дифференциальных уравнений и было продиктовано спецификой метода, которым интегрировались уравнения в рассматриваемый период,— метода множителей. Во-вторых, для этих исследований характерно отсутствие геометрической интерпретации уравнений и их решений и формально-аналитический подход к ним — используются остроумные аналитические приемы приведения некоторой дифференциальной формы к интегрируемой форме.

Указанные особенности — специфическая форма записи уравнений, использование метода множителей, формально-аналитический характер исследования — отличают первый, начальный, период развития области уравнений с частными производными первого порядка, который мы назовем формально-аналитическим. Наиболее полное выражение исследования этой поры находят в работах Эйлера и Даламбера

Для уравнений первого порядка в этот период,продолжавшийся до начала 70-ых гг. 18 века, было существенно продвинуто решение задачи их интегрирования. Отметим некоторые важные вехи в её решении:

Эйлер в (Novi Comment.Acad.Sci.Petrop.9.(1762-63).1764) проинтегрировал уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + \omega(x,y) = 0\ ;$$

Даламбер в (Opuscules. v.4. 1768)

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + \xi(x,\ y)z + \nu(x,\ y) = 0\ ;$$

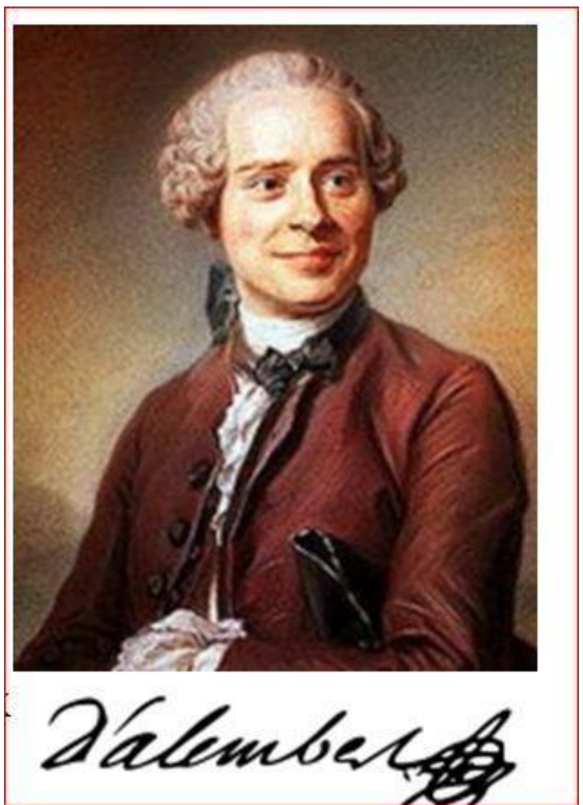
Лаплас в (Mém. Acad. Sci. Paris (1773). 1777)

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + f(x,y,z) = 0\ .$$

Разумеется, все многообразие результатов, полученных в 50-е —60-е гг., не укладывается в жесткие рамки той характеристики, которую мы привели выше. В недрах этого начального периода появились зародыши идей, реализация которых была делом последующих этапов развития предмета. Наметилась и мало-помалу укрепилась тенденция рассматривать уравнения вне связи с соответствующими уравнениями в полных дифференциалах. Первую запись уравнения с частными производными не в форме уравнений в полных дифференциалах из первого издания 1743 г. «Трактата по динамике» Даламбера мы уже приводили, однако такая запись становится нормой

Первыми методами интегрирования, приспособленными к новой записи уравнений, стали метод разделения переменных, истоки которого мы находим в работе Даламбера его «Трактата по динамике» (1758), и метод введения характеристических координат, предложенный Эйлером в работе (Misc.Taurin. V.3 (1762 – 1765). 1766), поначалу для волнового уравнения.

Таковы контуры поля исследований дифференциальных уравнений с частными производными, наметившиеся к началу 70-х годов XVIII в., на которые падает возникновение «теории Лагранжа», составляющей содержание следующего этапа их развития.



«Теория Лагранжа»

Зарождение этой теории связано с формированием в его работах концепции «полного решения». Лагранж отправлялся от эйлеровского понимания полноты решения уравнения с частными производными, зафиксированного в III томе «Интегрального исчисления» (1770). Согласно Эйлеру интегрирование дифференциального уравнения с частными производными n-го порядка полно, если полученное решение содержит n произвольных функций (здесь очевидна руководящая Эйлером аналогия с обыкновенными уравнениями, при этом роль произвольных констант играют произвольные функции). Полноту таким образом полученного решения Эйлер понимал в том смысле, что оно содержало всевозможные частные решения, получаемые из него соответствующей специализацией входящих в него произвольных функций. В работе «Об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка (Nouv.Mém.Acad.Belin (1772) 1774).

Лагранж рассматривает некоторые задачи III тома «Интегрального исчисления» Эйлера, используя при этом методы, чрезвычайно сходные с эйлеровскими по духу.

Он замечает, что решения, содержащие две произвольные константы, также являются в некотором смысле полными, ибо хотя они и не содержат всех решений уравнения, но из них методом вариации постоянных можно получить все решения, в том числе и полные в эйлеровском смысле. Здесь Лагранж еще придерживается эйлеровской терминологии. Эта идея становится центральной при выработке новой концепции «полного решения», появление которой в работе «О частных интегралах дифференциальных уравнений» (Nouv.Mém.Acad.Belin (1774) 1776) знаменует выход из эйлеровского круга идей и вместе с этим за границы формально-аналитического периода. Полным решением уравнения

$$f(x, y, z, p, q) = 0\,,\ (p = {}^{\partial z}/_{\partial x}\,,\ q = {}^{\partial z}/_{\partial y}) \quad (1)$$

Лагранж называет решение этого уравнения $z = \varphi(x, y, a, b)$, зависящее от двух произвольных постоянных a и b. Он показывает (и это оправдывает название введённого решения), что из него методом вариации постоянных можно получить все прочие: если в «полном решении» положить $b = \psi(a)$, где ψ — произвольная функция своего аргумента, а затем из уравнений

$$z = \varphi(x, y, a, \psi(a)), \quad \partial z/\partial a = 0$$

исключить a, то получится решение, зависящее от произвольной функции, — «общее», в его терминологии (полное в терминологии Эйлера). Наконец, если исключить a и b из уравнений

$$z = \varphi(x, y, a, b), \quad \partial z/\partial a = 0, \quad \partial z/\partial b = 0,$$

то получится решение, названное им «специальным» (впоследствии в «Теории аналитических функций» (1797) он назовет его «особым»).

Таким образом, задача интегрирования уравнения (1) сводится к нахождению «полного решения».

Лагранж выяснил геометрический смысл полученных им решений: «полное» решение задает двухпараметрическое семейство решений, «общее» — множество огибающих однопараметрических подсемейств этого семейства (выделяемых заданием зависимости $b = \psi(a)$), наконец, «специальное» (или «особое») задает огибающую двухпараметрического семейства, представляющего «полное» решение.

Хотя геометрический смысл понятий полного, общего и особого интегралов и был выяснен Лагранжем, однако это не привело его к последовательно построенной геометрической теории уравнений первого порядка. Создание теории явилось заслугой Г. Монжа и было выполнено последним в цикле исследований, из которых назовем лишь «Мемуар об исчислении интегралов уравнений с частными производными», опубликованный в 1787 г. и «Приложение анализа к геометрии», вышедшее в 1807 году.

В частности, Гаспар Монж ввёл понятие характеристики, по существу рассматривавшейся уже Эйлером и Лагранжем, и показал, как из характеристик конструируются решения.

Построенная Лагранжем теория, получившая отчетливое геометрическое звучание в трудах Г. Монжа, и составляет содержание второго этапа разработки области теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Развиваемые Лагранжем методы привели его в работах (Nouv. Mém. Acad. Berlin (1779) 1781; (1785) 1787) к решению проблемы интегрирования уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = b(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \quad \text{(III.2.1)}$$

для произвольного n путем сведéния ее к интегрированию системы обыкновенных уравнений

$$\frac{dx_i}{a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)} = \frac{dz}{b(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)}. \quad \text{(III.2.3)}$$

Долголетние исследования Лагранжем проблемы интегрирования уравнения

$$f(x, y, z, p, q) = 0 \quad \text{(III.2.4)}$$

были завершены в работе, представленной Парижской академии наук в 1784 г. рано умершим (в 1785 г.) математиком П. Шарпи. Эта работа так и не увидела света, сведения о ней содержатся у Lacroix в «Traité du calcul différentiel et du calcul integral». 2 éd. V.2. 1814, а также у Н.Н. Салтыкова (1872 – 1961). Суть метода Лагранжа –

Шарпи состояла в следующем

Шарпи состояла в следующем. Пусть нам как-либо удалось определить такую функцию $\varphi(x, y, z, p, q)$, что два уравнения:

$$f(x, y, z, p, q) = 0\,, \;\; \varphi(x, y, z, p, q) = a\,, \quad (2)$$

где a — произвольная константа, могут быть разрешены относительно p и q таким образом ($p = f_1(x, y, z, a)$, $q = f_2(x, y, z, a)$), что $dz = f_1(x, y, z, a)\,dx + f_2(x, y, t, a)\,dy$ удовлетворяется тождественно для любого значения постоянной a. Тогда интегрирование полученного уравнения в полных дифференциалах дает решение, содержащее наряду с произвольной константой a произвольную константу интегрирования,— мы получили, следовательно, «полное решение» уравнения (1).

Итак, задача свелась к нахождению дополнительного уравнения $\varphi(x, y, z, p, q) = a$. Нетрудно показать, что условие тождественного выполнения соотношения $dz = p\,dx + q\,dy$ для p и q, извлеченных из системы (2), дает уравнение, достаточное для определения функции $\varphi(x, y, z, p, q)$:

$$P\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (Pp + Qq)\frac{\partial\varphi}{\partial z} - (X + pZ)\frac{\partial\varphi}{\partial p} - (Y + qZ)\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0,$$

где

$$P = \frac{\partial f}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial q}, \quad X = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Уравнение такого типа (III.2.1), как мы уже заметили, было проинтегрировано Лагранжем в работе(Nouv.Mém.Acad.Berlin(1779)1781)

Оно сводится к системе обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}. \qquad \text{(III.2.6)}$$

При этом вовсе не нужно искать общего решения этой системы. Достаточно найти один ее интеграл

$$\varphi(x, y, z, p, q) = a.$$

Таким образом, методом Лагранжа — Шарпи решается

задача интегрирования уравнения (1).

Естественно было бы теперь заняться поиском метода интегрирования произвольных уравнений, содержащих

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0;$$

при этом первый путь, сам собой напрашивающийся,— попробовать обобщить на такие уравнения метод Лагранжа — Шарпи. Однако на пути такого обобщения возникали серьёзные трудности. Рассмотрим случай, когда уравнение не содержит явным образом z (к такому оно приводится без труда):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0.$$

По аналогии с методом Лагранжа — Шарпи следовало бы найти еще $(n-1)$ соотношение между $p_1, p_2, \ldots, p_n$, включающее $(n-1)$ произвольных постоянных $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, таких, чтобы $p_1, p_2, \ldots, p_n$, выраженные в функциях от $x_1, x_2, \ldots, x_n, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, обращали выражение

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n$$

в полный дифференциал. В этом случае искомый полный интеграл получался бы интегрированием последнего выражения. Для того чтобы оно было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы $\partial p_i / \partial x_k = \partial p_k / \partial x_i$ для любых $i, k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, искомые $(n-1)$ функции должны удовлетворять $(n-1)\, n/2$ условиям. В случае $n = 2$ $n - 1 = (n-1)\, n/2$, т. е. число искомых функций равно числу условий, во всех других оно больше числа искомых функций, т. е. переопределено.

Хотя, вероятно, этой задачей занимались в то время многие (мы знаем, что ею безуспешно занимался сам Шарпи), в 18 веке

решить ее не удалось, и она осталась в числе наиболее важных проблем, подлежащих исследованию. На ее значимость для математики начала XIX в. указывают имена математиков, приложивших в XIX в. усилия к ее решению, — И. Ф. Пфафф, О. Коши, К. Г. Якоби.

То, о чём рассказывалось сегодня, вы можете найти на с. 71 – 84 в:

Демидов С.С. Развитие исследований по уравнениям с частными производными первого порядка в XVIII – XIX вв. // Историко-математические исследования. Вып. 25. 1980. С. 71 – 103.

Мы же перейдём к решению только что сформулированной задачи,

полученному в работе немецкого математика Пфаффа, имя которого вам известно (дифференциальные формы Пфаффа, уравнения Пфаффа, пфаффиан), опубликованной в трудах Берлинской Академии наук в 1814 – 1815 гг.

Иоганн Фридрих Пфафф
(Pfaff J.F.;1765 – 1825)

1765 – родился в Штутгарте

с 1785 учился в ун-те в Гёттингене, Берлине, а также в Йене, Готе, Праге, Вене

1788 – 1810 – профессор (после защиты докт. дисс.) университета в Хельмштадте

с 1810 – профессор университета в Галле

1817 – член Берлинской Академии наук

учитель К.Ф. Гаусса и А. Мёбиуса

1825 – скончался в Галле

Иностранный член Петербургской Академии наук

Pfaff I.F. Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1814 – 1815. S. 76 – 136.

Надо сказать, что геометрический дух французской школы чужд Пфаффу, тяготевшему скорее к формально-аналитическому эйлеровскому стилю, в котором выдержаны его построения. Именно формально-аналитический подход позволил Пфаффу, по существу, перевести задачу в пространство $2n$ измерений, более того (вслед за Эйлером), рассмотреть частные производные от искомой функции в качестве независимых переменных. Мы говорим «по существу», так как такое геометрическое понимание в рамках математики начала XIX в. было невозможно.

Пфафф свёл задачу интегрирования уравнения

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (3)$$

или

$$p_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z; p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) \qquad (4)$$

(в такой форме оно обыкновенно встречается у Пфаффа), к эквивалентной задаче интегрирования уравнения

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_{n-1} dx_{n-1} - \\ - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z; p_1, p_2, \dots, p_{n-1})\, dx_n + \\ + 0 \cdot dp_1 + \dots + 0 \cdot dp_{n-1}, \tag{5}$$

а последнюю к более общей – интегрированию уравнения в полных дифференциалах

$$A_1(y_1, \dots, y_k)\, dy_1 + A_2(y_1, \dots, y_k)\, dy_2 + \dots \\ \dots + A_k(y_1, \dots, y_k)\, dy_k = 0. \tag{6}$$

Пфафф показывает, как при помощи специальной замены переменных уравнение (6) в этом случае приводится к аналогичному уравнению, содержащему (2n – 1) переменную.

Он отмечает, но не доказывает, что такая замена возможна лишь в случае чётного *k* . Сведение интегрирования уравнения (6) при *k = 2n – 1* к интегрированию аналогичного уравнения при *k = 2n – 2* производится специальным приёмом.

Пфафф показывает, что в итоге уравнение (6) можно проинтегрировать через *n* соотношений, содержащих $y_1, y_2, \dots y_k$ и одну произвольную функцию. Применительно к уравнению (5) это означает, что оно интегрируется через n соотношений, содержащих $x_1 x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ и произвольную функцию. Исключая из этих соотношений $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$, получим общее решение.

Таким образом, был получен метод, дающий принципиальную возможность интегрировать уравнение (3). Однако на практике этот метод чрезвычайно громоздкий: редукция уравнения (6) при чётном *k = 2n* к уравнению того же вида, содержащему одной переменной меньше, требует интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а полная реализация метода, включающая целую цепочку подобных редукций, требует интегрирования n систем обыкновенных дифференциальных уравнений, первая из которых имеет вид

$$
\frac{dx_1}{\partial f/\partial p_1} = \frac{dx_2}{\partial f/\partial p_2} = \dots = \frac{dx_n}{\partial f/\partial p_n} =
$$

$$
= \frac{dz}{p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \dots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial z} p_1} =
$$

$$
= \frac{dp_2}{-\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial z} p_2} = \dots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{\partial f}{\partial z} p_n} \qquad (7)
$$

и интегрирование которой, как показали дальнейшие исследования, достаточны для полного решения уравнения (3). Поэтому метод, предложенный Пфаффом, был впоследствии вытеснен более удобными методами О. Коши и К.Г. Якоби.

Значение же работы И.Ф. Пфаффа состоит прежде всего в том, что в ней начинается глубокое изучение природы уравнений в полных дифференциалах, названных впоследствии его именем.

Более полно об этой работе Пфаффа см. в:

Демидов С.С. К истории теории уравнений с частными производными первого порядка – работы И.Ф. Пфаффа и О. Коши // Историко-математические исследования. Вып. 24. 1979. С.191 – 217.