Демидов С.С.

История математического анализа в XVII – XX вв.
Избранные главы:

Из истории теории дифференциальных уравнений с частными производными

Осенний семестр 2023 г.

Лекция 4

Спор о колебании струны

Спор вовлёк в свою орбиту большинство крупных математиков того времени – Д. Бернулли, Ж. Лагранжа, П. Лапласа, Г. Монжа и др. Интересно, что большинство из них приняли возражения Даламбера: они согласились с тем, что для произвольных функций (например, для функций, у которых первая производная терпит разрыв) предложенные методы интегрирования уравнения колебания струны некорректны. В то же самое время, стараясь обосновать возможность использования «формулы Даламбера» в случае, когда начальная функция обладает разрывами второй и даже первой производной, они занялись поиском обходных способов получения этой формулы. При этом они, по существу, действовали на путях, на которых в XX веке определялись обобщённые решения (см.

Демидов С.С. О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в XVIII веке // Историко-математические исследования. Вып. 21. 1976. С. 158 – 182)

Так Лагранж в трактате «Новые исследования о природе и распространении звука» (Miscell.Taurin. V.2. 1760 – 1761) рассматривает уравнение колебания струны

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad (1'')$$

с граничными и начальными условиями

$$z\big|_{x=0} = z\big|_{x=a} = 0,\ z\big|_{t=0} = Z(x),\ \frac{\partial z}{\partial t}\bigg|_{t=0} = R(x).$$

Обе части этого уравнения он домножает на пока неопределённую функцию М (х) и полученное соотношение интегрирует в пределах от 0 до а:

$$\int_0^a \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} M(x)\,dx = \int_0^a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} M(x)\,dx.$$

Интегрируя правую часть по частям, Лагранж получает

$$\int_0^a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} M(x)\,dx = \left[\frac{\partial z}{\partial x} M(x) - z(x, t)\frac{dM}{dx}\right]_0^a + \int_0^a z\,\frac{d^2 M}{dx^2}\,dx.$$

Функция $M(x)$ выбирается так, чтобы $M(0) = M(a) = 0$, тогда

$$\int_0^a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} M(x)\,dx = \int_0^a z\,\frac{d^2 M}{dx^2}\,dx.$$

На $M(x)$ накладывается еще одно условие:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = kM, \tag{11}$$

где k — постоянное, тогда Лагранж получает

$$\int_0^a \frac{\partial^2 z}{dt^2} M(x)\,dx = k\int_0^a zM(x)\,dx \tag{12}$$

и, обозначая $s = \int_0^a zM(x)\,dx$,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = ks.$$

Лагранж интегрирует это уравнение и в итоге получает

$$\int_0^a z \sin\left(x \frac{\nu\pi}{a}\right) dx =$$

$$= \int_0^a \left[\frac{Z(x-t) + Z(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\left(\int U(\xi)\, d\xi\right)_{\xi=x+t} - \frac{1}{2}\left(\int U(\xi)\, d\xi\right)_{\xi=x-t}\right] \sin\left(x \frac{\nu\pi}{a}\right) dx.$$

Так как это равенство должно иметь место при любых значениях $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то Лагранж делает отсюда вывод (доказательства, разумеется, дать не мог и считал его само собой разумеющимся), что

$$z = \frac{Z(x+t) + Z(x-t)}{2} + \frac{\left(\int U(\xi)\, d\xi\right)_{\xi=x+t} - \left(\int U(\xi) d\xi\right)_{\xi=x-t}}{2}.$$

Относительно своего нового метода решения Лагранж полагал:

а) что он представляет собой аналог предыдущего метода («Что касается двух наших предыдущих методов, они прежде всего отличаются друг от друга только тем, что в последнем подставлены дифференциалы и интегралы вместо алгебраических сумм и разностей, которые находим в первом» [15, стр. 177].)

б) Этот новый метод позволяет, по мнению Лагранжа, избежать неприятностей, связанных с трудностями предельного перехода, свойственных первому. Таким образом, удается обосновать точку зрения Л. Эйлера на применимость «разрывных» функций для случая решения уравнения $(1'')$ и тем самым «преодолеть трудности, которые ему самому [Даламберу. — *С. Д.*] казались непреодолимыми в анализе» [15, стр. 177].

Для нас в рассуждениях Лагранжа представляется наиболее интересным следующее: говоря о решении задачи колебания струны, он пытается заменить уравнение (1″) этой задачи интегральным тождеством (12). «Я воображаю сначала, — пишет он [15, стр. 177], — что вместо простого общего уравнения $\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dx^2}$ [5], которое относится ко всем движущимся точкам, имеется бесконечное их число, из которых каждое представляет движение каждой точки в отдельности — движение, которое зависит, впрочем, от всех других, так как дифференциал d^2z, который взят в предположении изменения только x, выражает вторую разность значений z для трех последовательных точек. Я умножаю, следовательно, каждое из этих уравнений на неопределенный коэффициент M или, скорее, на количество Mdx, рассматривая M как переменную, которая может подойти ко всем уравнениям вообще, и я беру их сумму интегрированием... Теперь, так как речь идет о том, чтобы объединить вместе коэффициенты при каждом значении z, которое соответствует каждой подвижной точке, я преобразую мое интегральное уравнение к такому виду, чтобы дифференциалы z, зависящие от x, исчезли».

Таким образом, действия Лагранжа можно квалифицировать, в известном смысле, как замену классического решения обобщенным. При этом способ, которым вводится это обобщение (домножение на функцию, обращающуюся в нуль на концах промежутка, интегрирование по частям и получение интегрального тождества), удивительным образом сходен с одним из современных способов введения обобщённых решений. Мы употребили оборот «в известном смысле», чтобы подчеркнуть, что Лагранж нигде прямо не говорит о введении нового понятия решения и лишь действия его можно трактовать как направленные на такое введение.

В 1779 году к участию в споре примкнул П.С. Лаплас (1749 – 1827). В «Мемуаре о последовательностях» (Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris 1779 (82). 207 – 309) он, рассматривая колебания струны при $v_0 = 0$, вместо уравнения (1) брал дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{a^2}{\Delta x^2}\left[y(x+\Delta x, t) - 2y(x,t) + y(x-\Delta x, t)\right], \quad (1''')$$

конструировал его решение, а затем переходил к пределу при $\Delta x \to 0$. Лаплас полагал, что для законности такого перехода (чтобы $(1''')$ давало в пределе (1)) необходимо, чтобы первая производная от начальной функции не имела разрыва первого рода («это условие необходимо, чтобы предложенное дифференциальное уравнение могло существовать»). Для нас впрочем особый интерес имеют следующие его слова: «Когда в проблеме колеблющейся струны начальная кривая такова, что две её прилежащие стороны образуют конечный угол, например, когда она образована объединением двух прямых линий, то как мне кажется, геометрически предшествующее решение не может быть использовано. Но если мы рассматриваем эту проблему и все подобные ей физически, то мне кажется возможным применение данной нами конст-рукции также для случая, когда струна образована системой многих прямых линий. Действительно, *априори очевидно, что ее движение должно очень мало отличаться от движения, происходящего в предположении, что в точках, где эти прямые встречаются, имеются маленькие кривые* [закругления.— *С. Д.*], *которые позволяют использовать эту конструкцию* [курсив мой.— *С. Д.*]». Из этих слов видно, что интуитивно Лаплас правильно нащупывает тот путь, на котором во второй половине XIX века математическая мысль будет выходить на концепцию обобщённого решения – идею, родившуюся у Эйлера, которую невозможно было реализовать в рамках математики того времени.

Как мы видим, и Лагранж, и Лаплас в противовес мнению Даламбера подтвердили высказанное Эйлером положение о возможности использования в качестве начальной «разрывных» функций, не задающихся единым аналитическим выражением. Особенно наглядно это положение Эйлера было продемонстрировано Г. Монжем, давшем общепринятые затем геометрические конструкции решений ряда уравнений с частными производными, в частности волнового уравнения, и использовавшего при их построении «разрывные» функции.

Однако и Лагранж, и Лаплас не приняли положения Эйлера о том, что начальной кривой может быть любая сплошная кривая. Все они чувствовали необходимость наложить на начальную функцию те или иные требования гладкости: от недостаточного для классического решения требования существования непрерывных первых производных начальной функции (Лаплас) до излишнего требования Лагранжа её бесконечной дифференцируемости.

Чувствовал ли Эйлер слабость своей позиции, применяя для построения решения общую конструкцию, не предполагавшую от начальной кривой никакой другой гладкости, кроме сплошности, и определяя при этом решение как функцию, удовлетворяющую уравнению (1)? Судя по всему, нет, ибо более чем через двадцать лет после

начала спора в работе, опубликованной в 1773 г. в 17 томе Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. за 1772 г., отвечая на аргументы Даламбера, Эйлер заявлял, например, что функция $y = \varphi(u) = \sqrt[3]{a(a-u)^2}$, где $u = ct + x$, удовлетворяет (sic!) уравнению $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, хотя $y = \sqrt[3]{a(a-u)^2}$ имеет в точке $u = a$ заострение, что свидетельствует о желании Эйлера внушить читателю воззрения, которые он не умел ещё чётко сформулировать.

Апологеты Эйлера в этом споре, например Арбогаст, вовсе не чувствовали слабых мест в позиции Эйлера, и, развивая его идеи, подчас усугубляли слабые стороны эйлеровских рассуждений. В своих построениях, выполненных в духе Г. Монжа и удостоенных премии Петербургской Академии наук, Л.Ф.А. Арбогаст (1791) поддерживает идею Эйлера о возможности применения «разрывных» функций в решениях дифференциальных уравнений. При этом он идет дальше Эйлера, предполагая, что произвольные функции могут иметь даже разрывы 1-го рода (в его терминологии fonctions discontigües). Для подтверждения такой точки зрения Арбогаст широко использует идею односторонней производной. Возражая Даламберу, Лагранжу, Лапласу и Кондорсе, накладывающим ограничения на гладкость начальной функции, Арбогаст не замечает, что, по сути дела, ведет речь не о классическом решении, а о некотором его обобщении, представления о котором он черпает из геометрических построений в стиле Г. Монжа.

по-видимому, геометрическое исследование вопроса, проведенное Монжем, привели Даламбера к отказу от его первоначального требования «непрерывности» начальной функции. В работе «О разрывных функциях» [23], опубликованной в VIII томе «Opuscules», он использует в конструкции решений дифференциальных уравнений, проводимых в чисто монжевском стиле, «разрывные» функции. В частности, он пишет [23, стр. 307]: «Вообще можно, я думаю, установить следующее правило для разрывных функций, которые могут встречаться при интегрировании уравнений с частными производными. Пусть задано уравнение порядка n и $\varphi(x, y)$ и т. д.— разрывная функция, которая входит в интеграл и которая становится последовательно функциями $\Delta(x, y)$, $\Theta(x, y)$ и т. д.; разрывная функция может входить в интеграл только в случае, когда дифференциальное уравнение будет иметь место для всех возможных значений z. Пусть $\frac{d^n z}{dx^n} = B\,\frac{d^n z}{dy^n}$ и пусть $\varphi(Ax + y)$ разрывная функция, которая удовлетворяет этому уравнению и становится разрывной при $z = a$; нужно, чтобы эта функция была таковой, чтобы $\frac{d^n\varphi(z)}{dz^n}$ было бы равно $\frac{d^n\Delta z}{dz^n}$, когда $z = a$, и чтобы то же самое было бы для $\frac{d^{n-1}\varphi(z)}{dz^{n-1}}$ и $\frac{d^{n-1}\Delta z}{dz^{n-1}}$, когда $z = a$ и т.д.».

В 9 неопубликованном томе Opuscules, Даламбер вновь возвращается вращается к вопросу о применении «разрывных» функций, на этот раз уже конкретно к проблеме колебания струны: «Итак, мы думаем теперь, что для решения этой задачи может быть необязательным, чтобы значение ординаты y кривой выражалось непрерывной функцией и что она может принадлежать кривой с различного рода ветвями». И далее, перечисляя ограничения, накладываемые на поведение y, он отмечает, что «$\frac{ddy}{dx^2}$ нигде не делает скачка, т. е. на кривой нет точек, в которых $\frac{ddy}{dx^2}$ имеет *одновременно* два различных значения».

Приведенные фрагменты из сочинений Даламбера указывают не только на признание им позиции Эйлера по вопросу о применимости «разрывных» функций, но, что особенно важно, на выделение четкого, освобожденного от излишних ограничений, понятия классического решения [8] как такой функции z, что «дифференциальное уравнение будет иметь место для всех возможных значений z»

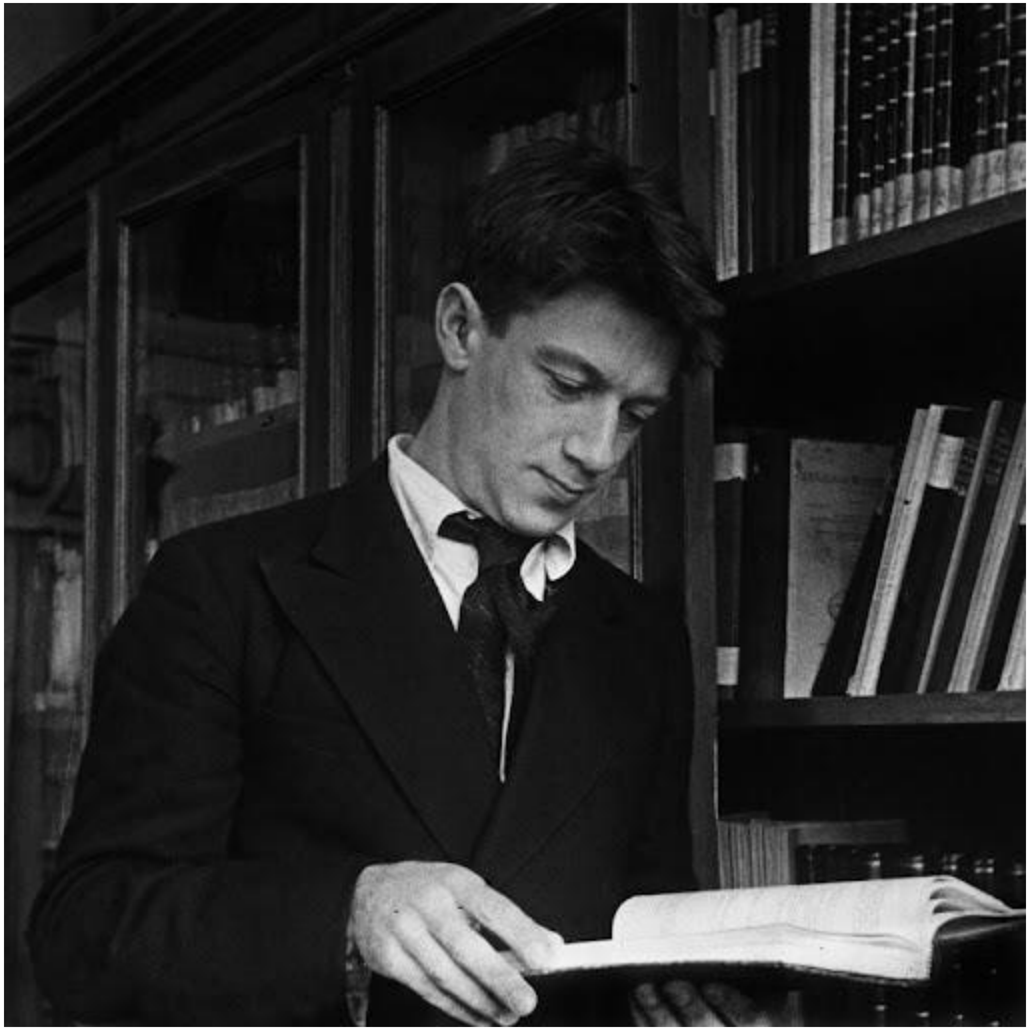
Эйлер, по существу, понимал под решением уравнения (1) обобщенное решение, корректное определение (а тем более построение теории) которого превышало уровень возможностей математики того времени. Однако, благодаря своим большим практическим возможностям, конструкция Эйлера получила признание среди широких кругов математиков, хотя лишь немногие пытались дать ей строгое обоснование (рассмотренные нами попытки Лагранжа, замечания Лапласа). Первым, кому удалось обойти трудности в случае, если начальная форма струны имеет угловые точки (типа защеплённой струны) был, по-видимому, немецкий математик Э.Б. Кристоффель (1829 – 1900), который в своих лекциях, опубликованных в 1877 г.

25. *E. B. Christoffel.* Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten. Ann. di Matem. Pura et Applic. (II), 8, 81–112 (1877) = Werke, 2, 51–80.

заменил дифференциальное уравнение (1) физической проблемы соответствующим интегральным уравнением, которое уже не содержало вторых производных от искомой функции.

Идея обобщённого решения с большим трудом находила понимание у математиков. Одним из первых на этом пути стал Б. Риман – в диссертации, защищённой в Гёттингене в 1851, он ввёл обобщение решения уравнения Лапласа (Демидов С.С. История и метод. естеств.наук.Вып.11.1971.С.70–71). Об обобщённом понятии решения уравнений с частными производными говорил Гильберт в докладе «Математические проблемы».Формулируя 20 пробл. существования решения краевой задачи для эллипт. дифф.уравнений,он среди необходимых условий её разрешимости называет обобщение понятия решения: «если в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование».

Обобщённые решения уравнений с частными производными становятся объектом математических исследований в 30-е годы XX века. Центральное место в этом процессе принадлежит советскому математику С.Л. Соболеву (1908 – 1989) и немецкому математику К.О. Фридрихсу (1901 – 1982)



Таким образом на путях обсуждения проблемы колебания струны был намечен вектор одного из магистральных путей развития теории дифференциальных уравнений – введения понятия их обобщённого решения.

И может быть один из главных результатов рассказанной истории: в ходе спора о колебании струны происходило разрушение уже веками сложившегося убеждения, что математические структуры суть выражения свойств окружающего нас пространства, другими словами, математическая реализация явлений действительности. Самым известным и радикальным событием в разрушении такого убеждения стала история неевклидовой геометрии. С большим трудом математики отказывались от идеи, что евклидова геометрия трёхмерного (извините за тавтологию!) евклидова пространства – геометрия окружающего нас физического мира. (Вспомним, что даже создатель неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевский пытался обосновать её «истинность», проводя астрономические наблюдения !) Математический анализ в рамках этих представлений – описание механических процессов,происходящих в этом пространстве. Спор о колебании струны, точнее о природе функций, входящих в решение уравнения колебания струны, показал, что физическое явление следует отличать от его математической модели (или даже моделей), что нельзя в обсуждении математического вопроса некритически использовать физические аргументы, как это делали и Эйлер, и Даламбер. С большим трудом математики начали осознавать, что физическое явление и его математическая модель суть материи разного порядка !

Теоретико-функциональный аспект спора

В 1753 году в спор вступил Д. Бернулли (Hist. Acad. Sci. Berlin (1753) 1755), который, исходя из физических соображений, предложил искать решение задачи в виде суперпозиции гармонических колебаний – в виде тригонометрического ряда

$$y = \alpha \sin\frac{\pi x}{l} + \beta \sin\frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{l} + \cdots,$$

где l – длина струны, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ – функции времени.

Д. Бернулли исходил из физических соображений: звук, издаваемый струной, состоит из главного тона и бесконечного множества более слабых обертонов. Каждому тону соответствует форма струны в виде синусоиды, следовательно, фигура колеблющейся струны должна является сочетанием таких синусоид («принцип наложения колебаний» Д. Бернулли). Бернулли считал, что любую связную кривую можно изобразить тригонометрическим рядом.

Такой подход вызвал дружную отрицательную реакцию всех без исключения участников спора, включая Даламбера, Эйлера и Лагранжа. Все они полагали, что функции, представленные тригонометрическим рядом, составляют хотя и важный, но всё же частный класс, рассматриваемых в анализе функций. Ситуация коренным образом изменилась после работ Ж. Фурье, открывшего миру гармонический анализ (об этом см.: Паплаускас А.Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. М. 1966). В его рождении, как мы видим, важную роль сыграла проблема колебания струны – с её исследования родился и метод разделения переменных (Даламбер, Эйлер), и идея представления встречающихся в анализе функций тригонометрическими рядами (Д. Бернулли).

Особое место этот вопрос и проблема колебания струны заняли и в истории Московской школы теории функций. Достаточно вспомнить знаменитую диссертацию Н.Н. Лузина «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915). С рассказа о колебании струны он начинал свои курсы по теории функций действительного переменного.

Лузин Н.Н. (1883 – 1950)

Бари Н.К. (1901 – 1961)