Демидов С.С.

История математического анализа в XVII – XX вв.
Избранные главы:

Из истории теории дифференциальных уравнений с частными производными

Осенний семестр 2023 г.

Лекция 3

Проблема колебания струны – одна из важнейших задач в истории математики. Достаточно вспомнить, что размышления над феноменом звучащей струны положили начало математическому естествознанию: они дали пифагорейцам экспериментальные основания для их великого прозрения – «всё есть число». Смысл этой формулы, лежащей в фундаменте их учения, рассматриваемого в перспективе последующего развития мысли, заключался в следующем – за любыми проявлениями окружающей нас действительности следует искать математическую закономерность (число !!!) этими проявлениями управляющую.

С открытием дифференциального и интегрального исчисления она стала одной из наиболее значимых проблем математического анализа. Первым, кто приступил к серьёзному изучению малых поперечных колебаний закреплённой на концах струны, стал Брук Тейлор (1685 – 1731). В трактате «Methodus incrementorum directa et inversa» (первое издание 1715 г., второе – 1717), том самом, в котором были обнародованы его знаменитые результаты о разложении в ряд Тейлора, он свёл её к исследованию системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b^2y \ , \ \frac{d^2y}{dt^2} = -(ab)^2y \ ,$$

интегрируя которую в предположении, что концы струны закреплены и в начальный момент она совпадает с осью *x* , получил решение в виде

$$y = A \sin bx \ \cdot \sin abt$$

(см. Truesdell C. The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638 – 1788. Turici.1960 / Euler L.Opera omnia. Ser.2. v. XI_2)

В 1747 эта задача была сведена Ж. Даламбером к форме эквивалентной привычному нам уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

решение которого он искал при начальных ($u(x,0) = u_0(x)$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \nu_0(x)$) и граничных ($u(0,t) = u(l,t) = 0$) условиях. Он записал решение этой задачи в виде

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+at)+u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \nu_0(\xi)d\xi \quad -$$

формулы, носящей ныне его имя. В дальнейшем для простоты положим $a = 1,\ \nu_0(x) = 0.$ Тогда уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1),$$

а формула Даламбера

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+at)+u_0(x-at)}{2} \qquad (2).$$

Метод, которым Даламберу удалось проинтегрировать уравнение (1), был приспособлен к другой форме записи уравнения – выражений в полных дифференциалах. Если ввести обозначения

$$du = pdx + qdt,\ dp = rdx + sdt,\ dq = sdx + wdt,$$

то Даламбер ставил задачу нахождения u из условия, что выражения

$$rdx+sdt \qquad (3)$$
$$sdx+rdt$$

будут полными дифференциалами.

Вначале он складывает два выражения (3). Получается

$(r+s)d(x+t)$, которое также будет полным дифференциалом. Отсюда он делает заключение, что в качестве $r + s$ можно взять произвольную функцию от $x + t$:

$$r + s = F\,(x + t) \qquad (4)$$

Вычитая второе из выражений (3) из первого,получим $(r – s)d(x – t)$,

которое также будет полным дифференциалом, а в качестве $r – s$ можно взять произвольную функцию от $x – t$:

$$r – s = \Phi\,(x – t) \qquad (5)$$

Из (4) и (5) Даламбер получал r и s. Интегрируя систему (3), он получал p и q, наконец, интегрируя $du = pdx + qdt$, он получал общее решение в виде $u = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$, где φ и ψ – произвольные функции своих аргументов. Далее он приходил к «формуле Даламбера», учитывавшей начальные и краевые условия.

В работе «Замечания к предшествующему мемуару г-на Бернулли», опубликованной в 1755 в томе Мемуров Берлинской Академии наук за 1753 год, Эйлер ввёл обозначения для частных производных $(\frac{dy}{dx})$, $(\frac{ddy}{dx^2})$, ... и сами уравнения и методы их интегрирования приняли почти привычный нам вид. Сам Эйлер писал так: «Вот, следовательно, к чему свелась проблема движения струны: речь идёт о том, чтобы найти для y функцию двух переменных x и t, удовлетворяющую такому уравнению $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{Fa}{2M}(\frac{ddy}{dx^2})$ и, кроме того, свойствам указанным выше [граничным и начальным условиям – С.Д.]. Но прежде чем обратить внимание на эти свойства, найдём вообще все возможные функции x и t, которые, будучи подставленными вместо y, удовлетворяют уравнению $(\frac{ddy}{dt^2}) = \frac{Fa}{2M}(\frac{ddy}{dx^2})$. Это проблема, общее решение которой первым дал г-н Даламбер».

Первоначально эту теорию, конкурируя между собой, разрабатывали лишь два математика – Даламбер и Эйлер. Как мы уже говорили ранее, в работах опубликованных, соответственно, в 1749 и в 1752, Даламбер положил начало методу разделения переменных, развитие которому дал, как мы уже упоминали, во втором издании «Трактата по динамике», увидевшем свет в 1758 году. В его работе 1747 года мы находим и истоки метода характеристических замен, хотя полноценным образом провести характеристические замены можно провести лишь в уравнениях, записанных в привычной нам форме. Это и было сделано Л. Эйлером в работе, опубликованной в 1766 году в третьем томе Miscellanea Taurinensia за 1762 – 1765 гг.: произведя такую замену в уравнении

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

он свёл его к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial x_1} = 0$$

– приём, ставший хрестоматийным.

Основной темой предыдущей лекции были исследования Даламбера по теории уравнений с частными производными. Говорилось о том, что его работы 40-ых гг. сразу обратили на себя внимание Эйлера, который не только высоко оценил результаты французского математика, но и немедленно приступил к исследованиям в открывшейся новой области анализа. Первый период её развития проходил в острой конкуренции двух математиков. Очень быстро Эйлер вырвался вперёд. Вершиной этих исследований стал 3-ий том его «Интегрального исчисления» (1770). Однако, и Даламбер продолжал разработку теории. Вот лишь некоторые из его достижений. Уже в работе «Добавление к мемуару о кривой, которую образует натянутая и введённая в колебание струна», опубл. в 1752 в Мемуарах Берлин. Акад. за 1750 год, мы находим развитие метода разделения переменных, истоки которого обнаруживаются в «Продолжении исследований о кривой, которую образует натянутая и введённая в колебание струна», опубликованном в том же журнале за 1747 г. (опубл. в 1749 г.). Дальнейшие исследования, развивающие этот метод мы находим в его публикациях в 1 томе его Opuscules (опубл. в 1761 г.) и в Мемуарах Берлинской Академии наук за 1763 год (опубл. в 1770 году). Наконец в 1768 году в 4 томе Opuscules вышло в свет последнее сочинение Даламбера об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными — «Исследования по интегральному исчислению» [16]. Этот мемуар, завершающий более чем двадцатилетние его исследования этой новейшей ветви математического анализа, содержал как развитие разработанных им ранее методов, таких, как метод множителей или метод разделения переменных, так и ряд новых. Согласно замечанию Даламбера [16, стр. 254], изложенное в мемуаре было получено им уже в 1762 г. Однако задержка с публикацией привела к тому, что некоторые из его результатов, относящихся к интегрированию уравнений первого порядка и независимо полученные Л. Эйлером, были опубликованы последним уже в 1764 г. [22].

В этом трактате Даламбер проинтегрировал уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + \xi(x, y)\, z + \nu(x, y) = 0$$

а также ряд уравнений второго и третьего порядков.

Обо всём этом, а также о других вопросах, рассмотренных в предыдущей и сегодняшней лекциях см.:

Демидов С.С. Дифференциальные уравнения с частными производными в работах Даламбера // Историко-математические исследования. Вып.19. 1974. С. 94 – 124.

Демидов С.С. Возникновение теории дифференциальных уравнений с частными производными // Историко-математические исследования. Вып. 20. 1975. С. 204 – 220.

Мы же переходим к более основательному рассмотрению вопроса о проблеме колебания струны.

Спор о колебании струны

d’Alembert J. Recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration // Histoire de l’Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin. Année 1747. V.3. Berlin.1749. 214 – 219.

d’Alembert J. Suite de recherches sur la courbe que forme une corde tendue, mise en vibration //Histoire de l’Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin. Année1747.V.3. Berlin.1749. 220 – 229.

Спор о колебании струны

Euler L. Sur la vibration des cordes // Histoire de l’Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin. Année 1748. V.4. Berlin.1750. 69 – 85.

В этой работе Эйлер предложил свой (мало отличающийся от даламберовского) метод интегрирования уравнения колебаний струны. Что самое существенное – он заявил, что начальная функция может быть произвольной механической кривой. Эта произвольность, как он заметил позднее (Novi Comm. Ac. Sci. Petrop. 1772. V. 17. 1773), ограничивается лишь сплошностью кривой. Эйлер исходил из физической сущности задачи – струне можно придать начальную форму, присущую произвольной механической кривой, а также из формы решения, которая позволяла строить решение во всей плоскости *x, t* при произвольном задании начальных данных.

Спор о колебании струны

Предлагаемое Эйлером решение не является классическим – оно может иметь разрывы не только вторых, но и первых производных. Таким образом, по существу, им были введены обобщённые решения уравнений, более того, им было расширено поле применения анализа от функций аналитических до функций кусочно-дифференцируемых. Однако обобщение решения было произведено им совершенно некорректно: он даже не дал определения такого решения. Говоря, в одних случаях, что оно удовлетворяет уравнению, он не поясняет смысла этих слов (как может функция не обладающая вторыми производными удовлетворять уравнению ?), в других, обсуждая свойства решения, прибегает к чисто физическим соображениям. Некорректность рассуждений Эйлера (а сделать их корректными при тогдашнем уровне анализа было невозможно) вызвала резко отрицательную реакцию со стороны Даламбера.

Даламбер заявил, что начальная кривая (это его главное возражение!) должна задаваться «непрерывной» функцией. Непрерывность он понимал не в нашем смысле, но в смысле какой вкладывался в этот термин в XVIII веке: функция должна задаваться единым аналитическим выражением. «Во всех других случаях проблема не может быть решена, во всяком случае моим методом. И я полагаю даже, что она превосходит возможности современного анализа», – писал он в статье

d'Alembert J. Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration // Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin. Année1750. Berlin.1752. 355 – 360.

Конечно (и здесь он был глубоко прав!), построение теории обобщённых решений, которые по существу вводил Эйлер, было не по силам анализу XVIII века. Однако, тогдашняя концепция «непрерывной» функции была внутренне несостоятельна и потому позиция Даламбера также выглядит дефектной.

Разъясняя суть своих возражений, Даламбер свёл их к двум главным: 1) к необходимости выражения начальной функции единым аналитическим выражением (к её «непрерывности» в тогдашней терминологии), 2) к необходимости того, чтобы начальная функция была дважды дифференцируема. При этом в понимании математиков того времени второе (дважды дифференцируемость) должно было следовать из первого (из «непрерывности»).

Спор о колебании струны

Вскоре спор вовлёк в свою орбиту большинство крупных математиков того времени – Д. Бернулли, Ж. Лагранжа, П. Лапласа, Г. Монжа и др. Интересно, что большинство из них приняли возражения Даламбера: они согласились с тем, что для произвольных функций (например, для функций, у которых первая производная терпит разрыв) предложенные методы интегрирования уравнения колебания струны некорректны. В то же самое время, стараясь обосновать возможность использования «формулы Даламбера» в случае, когда начальная функция обладает разрывами второй и даже первой производной, они занялись поиском обходных способов получения этой формулы. При этом они, по существу, действовали на путях, на которых в XX веке определялись обобщённые решения (см.

Демидов С.С. О понятии решения дифференциальных уравнений с частными производными в споре о колебании струны в XVIII веке // Историко-математические исследования. Вып. 21. 1976. С. 158 – 182)

Спор о колебании струны

В 1759 г. в дискуссию вступил Лагранж, опубликовавший «Исследования о природе и распространении звука» (Miscellanea Taurinensia. Т. 1. 1759. pp. 1 – 112). Обсуждая вопрос о решении задачи колебания струны Лагранж в 15 параграфе пишет:

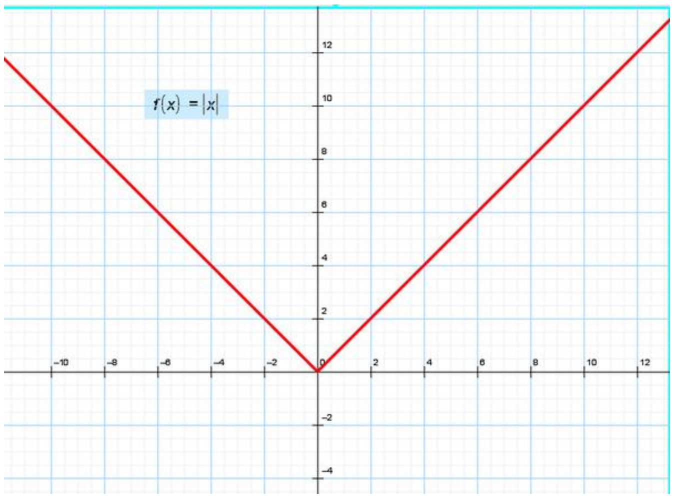
«...Мне кажется несомненным, что следствия, которые выводятся по правилам дифференциального и интегрального исчислений, будут всегда незаконными во всех случаях, если этот закон [закон непрерывности. — *С. Д.*] не предполагается имеющим место. Отсюда следует, что так как построение господина Эйлера выведено непосредственно из интегрирования данного дифференциального уравнения [имеется в виду метод Эйлера решения уравнения (1). — *С. Д.*], то это построение по самой своей природе применимо только к непрерывным кривым, которые могут быть выражены некоторой функцией переменных t и x. Я заключаю, следовательно, что все доказательства, которые можно привести для решения такого вопроса, предполагая сначала, что ордината y кривой будет функцией t и x, как делали до сих пор господа Даламбер и Эйлер, абсолютно недостаточны и что только через исчисление, какое мы имеем в виду, когда рассматриваются движения точек кривой, каждой в отдельности, можно надеяться достичь заключения, защищенного от всех ударов».

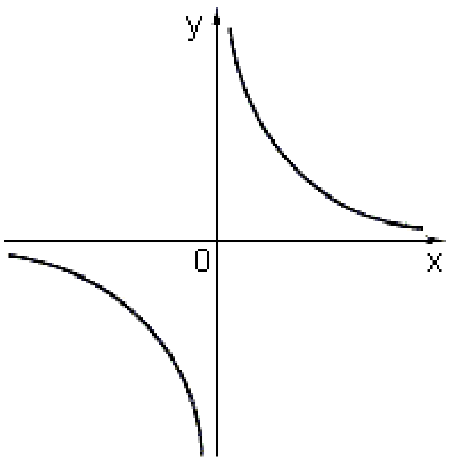
Пример «разрывной» функции:

$$y = -x \text{ (для } x < 0), x \text{ (для } x \geq 0)$$

Пример «непрерывной» функции:

$$y = \frac{1}{x}$$





Из приведенной цитаты видно, что Лагранж разделяет точку зрения Даламбера о неприменимости операций анализа к «разрывным» функциям. Однако, считая само решение, полученное Даламбером в виде (2), применимым и к «разрывным» функциям (здесь он солидаризируется с Эйлером), Лагранж ставит задачу его получения другим методом, рассматривая движение каждой точки струны в отдельности.

Лагранж рассматривает задачу о колебании закрепленной на концах нити, нагруженной $n-1$ равными массами, разделяющими нить на n равных частей. Он приводит ее к решению системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2y_k}{dt^2} = l\,(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

(y_k — ордината k-й массы, l — положительная константа, $y_0 = y_n = 0$) с начальными условиями $y_i|_{t=0} = Y_i$, $\left.\frac{\partial y_i}{\partial t}\right|_{t=0} = V_i$. Эту систему он решает по методу, данному Даламбером в 4 томе мемуаров Берлинской академии за 1748 г. (см. [14]). Он обозначает $\frac{\partial y_k}{dt} = u_k$ и получает систему

$$du_k = l\,(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})\,dt \qquad (k = 1, \ldots, n-1),$$
$$dy_k = u_k dt.$$

Умножая первые $n-1$ уравнений на неопределенные множители M_i, вторые $n-1$ уравнений на N_i и складывая их вместе, Лагранж получает

$$\sum_{k=1}^{n-1} (M_k du_k + N_k dy_k) =$$

$$= dt \sum_{k=1}^{n-1} [N_k u_k + l\,(M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1})\, y_k], \qquad (6)$$

где $M_0 = M_n = 0$. Для неопределенных коэффициентов Лагранж выписывает следующие соотношения:

$$RM_k = N_k, \qquad RN_k = l\,(M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1}), \qquad (7)$$

тогда соотношение (6) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n-1} M_k d\,(u_k + Ry_k) = Rdt \sum_{k=1}^{n-1} M_k (u_k + Ry_k).$$

Если обозначить

$$\sum_{k=1}^{n-1} (M_k u_k + RM_k y_k) = z, \qquad (8)$$

то получим

$$dz = Rzdt,$$

откуда

$$z = Fe^{Rt},$$

где F — произвольная константа. Для нахождения R и M_k Лагранж выписывает систему, которая следует из соотношений (7):

$$R^2 M_k = l\,(M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1}).$$

Он выбирает следующую систему значений, удовлетворяющих этой системе:

$$R^2 = -4l \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n}, \qquad M_k = \frac{\sin \frac{k\nu\pi}{n}}{\sin \frac{\nu\pi}{n}} \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1). \tag{9}$$

Возвращаясь к (8), Лагранж получает

$$\sum_{k=1}^{n-1} (M_k u_k + R M_k y_k) = F e^{Rt},$$

или, что то же самое,

$$\frac{d\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} M_k y_k\right)}{dt} + R \sum_{k=1}^{n-1} M_k y_k = F e^{Rt},$$

где M_k и R — известные выражения, определяемые по формулам (9), или, обозначив $\sum\limits_{k=1}^{n-1} M_k y_k = u$,

$$\frac{du}{dt} + Ru = F e^{Rt}.$$

Интегрируя последнее уравнение, Лагранж находит

$$\sum_{k=1}^{n-1} M_k y_k e^{Rt} = \frac{F}{2R} e^{2Rt} + G,$$

где G — произвольная константа. Обозначив

$$\sum_{k=1}^{n-1} M_k Y_k = P, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} M_k V_k = Q, \tag{10}$$

Лагранж получает систему из $n-1$ уравнений для определения $n-1$ неизвестных $y_1, \ldots, y_{n-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} M_k y_k = P \cdot \cos\left(2t\sqrt{l} \cdot \sin\frac{\nu\pi}{2n}\right) + $$

$$+ Q \frac{\sin\left(2t\sqrt{l}\sin\frac{\nu\pi}{2n}\right)}{2\sqrt{l}\sin\frac{\nu\pi}{2n}},$$

$(\nu = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$,

где M_k определяются по формулам (9), а P и Q — по формулам (10). Окончательное решение Лагранж записывает в виде

$$y_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} P_i \sin\frac{ik\pi}{n} \cos\left(2t\sqrt{l}\,\sin\frac{i\pi}{2n}\right) + \\ + \frac{1}{n\sqrt{l}} \sum_{i=1}^{n-1} Q_i \frac{\sin\frac{ik\pi}{n} \sin\left(2t\sqrt{l}\,\sin\frac{i\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{i\pi}{2n}},$$

где

$$P_i = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j \sin\frac{ij\pi}{n},\ Q_i = \sum_{j=1}^{n-1} Y_j \sin\frac{ji\pi}{n}.$$

Далее Лагранж переходит к задаче колебания струны, рассматривая последнюю как предельный случай рассмотренной нагруженной нити при $n \to \infty$ и стремлении к нулю массы каждого грузика (так, что суммарная масса всех грузиков стремится к конечному пределу — массе струны). В результате перехода к пределу при $n \to \infty$, отличавшегося полным отсутствием какой-либо строгости, Лагранж получил следующее выражение для решения задачи колебания закрепленной на концах струны:

$$y = \frac{\varphi\left[\pm\left(x + \frac{aHt}{T} - 2sa\right)\right] + \varphi\left[\pm\left(x - \frac{aHt}{T} - 2sa\right)\right]}{2}$$

(a, H, T, s — некоторые константы). По поводу полученного таким образом решения Лагранж пишет [13, стр. 107]: «И это построение, очевидно, то же самое, которое господин Эйлер изобрел для этой же гипотезы. Вот, следовательно, теория этого великого Геометра, поставленная вне всяких посягательств и установленная на принципах прямых и ясных, которые не основываются каким-либо образом на законе непрерывности, на котором настаивает господин Даламбер».

Некорректно проведённый Лагранжем предельный переход вызвал реакцию со стороны Даламбера и Д. Бернулли. В своем трактате «Новые исследования о природе и распространении звука» Лагранж пишет [15, стр. 159]:

(Miscellanea Taurinensia. V. 2. 1760 – 1761)

«Такой переход от конечного к бесконечному в моих формулах не показался достаточно очевидным и доказательным двум великим Геометрам, господам Даниилу Бернулли и Даламберу, как они соизволили дать мне почувствовать в своих частных письмах; я подумал, что нужно найти другой, более простой метод, который поможет избежать всех затруднений, встречающихся при преобразовании формул». И такой метод он предложил в названном выше трактате.