Демидов С.С.

История математического анализа в XVII – XX вв.
Избранные главы:

Из истории теории дифференциальных уравнений с частными производными

Осенний семестр 2023 г.

Лекция2

Вернёмся к общей геометрической теории уравнений с частными производными – к линии, начало развития которой положил Г. Монж. Следующим этапом здесь стало творчество норвежского математика

Софуса Ли (1842 – 1899)

1842 – родился в Норфворддейде в семье лютеранского пастора

1865 – окончил университет в Христиании

1870 – стажировка в Германии; начало дружбы с Ф. Клейном и их поездка в Париж

1871 – защита диссертации в Христиании

1872 – э.о. профессор ун-та в Христиании

1884 – приезд Ф. Энгеля, помощника в работе над «Теорией групп преобразований» (т.1–3, 1888-93)

1888 – 98 – профессор в Лейпциге

1899 – смерть в Христиании

Софусом Ли была создана новая геометрическая теория уравнений с частными производными 1-го порядка (Theorie der Transformationsgruppen. Bd. 2. Leipzig. 1890).

Рассматривая уравнение $F(x, y, z, p, q)=0$ как уравнение с пятью неизвестными x, y, z, p, q, связанными дифференциальным соотношением $dz-pdx-qdy=0$, Ли ставил задачу исследования его интегральных многообразий — многообразий элементов (x, y, z, p, q), удовлетворяющих уравнению и указанному дифференциальному соотношению. Основным аппаратом исследований Ли стала созданная им теория контактных преобразований. За работами Ли последовал целый ряд исследований (в том числе уже цитированная диссертация Д. Ф. Егорова), содержавших попытки построения аналогичной теории для уравнений второго порядка. Однако ни на пути, указанном С. Ли, ни на каком ином, из числа разрабатываемых математиками того времени, построение общей теории, сравнимой

по результатам с теорией уравнений первого порядка, достигнуто не было.

К началу XX столетия в теории уравнений с частными производными 2-го порядка сложилась следующая ситуация: продолжались попытки имевшимися в наличии методами в рамках традиционных теорий построить общую теорию таких уравнений. Однако серьёзных успехов в этом направлении достичь не удавалось. В то же самое время в трудах ряда математиков

уже формировался взгляд на теорию уравнений в частных производных как на теорию краевых задач. Последняя же, развивавшаяся до сих пор внутри математической физики, обладала богатым арсеналом результатов и методов (классические результаты Гаусса, Римана, Дирихле, Шварца, К. Неймана, Пикара, Пуанкаре, Дюбуа Реймона и др.). Постановка тех или иных краевых задач для различных видов уравнений математической физики диктовалась простыми физическими соображениями. И когда появилась фундаментальная классификация уравнений по типам (1889), то уже для каждого из них имелись свои, созданные в математической физике, виды краевых задач.

С появлением у Ж. Адамара (1917) понятия корректности краевой задачи замкнулся тот основной круг вопросов, в пределах которого развивалась в дальнейшем теория краевых задач.

Когда в конце 60-ых гг. перед сегодняшним лектором встал вопрос – какими вопросами заняться после защиты кандидатской диссертации ? – для него было ясно, что это должны быть вопросы истории теории дифференциальных уравнений с частными производными, в которую он уже основательно погрузился.

Какие это должны быть вопросы ?   Историей теории краевых задач для таких уравнений успешно занимались в ту пору многочисленные исследователи, преимущественно в нашей стране. (Интерес к ним на Западе в 60-е годы только пробуждался !) Входить в эту группу, испытывая естественные в такой ситуации осложнения, не хотелось. Поэтому он избрал историю общей геометрической теории, на которую никто тогда не посягал. Тем более, что она не казалась в ту пору перспективной. Как мы понимаем сегодня, по этому вопросу в самой теории дифференциальных уравнений тогда наметился крутой поворот. Ему способствовали импульсы, идущие из приложений (из физики !), а также возросшие возможности математического аппарата, ещё вчера демонстрировавшего свою неспособность решать такие задачи. Однако возможность такого поворота ощущали тогда очень немногие специалисты в области дифференциальных уравнений. До лиц, занимавшихся историей, весть о подобном повороте докатилась, как обычно, с большим опозданием.

Уравнения с частными призводными 1-го порядка
Работы Эйлера

Историю дифф. уравнений с частными производными, как мы уже видели, вплоть до недавнего времени, было принято начинать с работы Эйлера «Дополнение к рассуждению о бесконечном количестве кривых одного и того же рода» (Comment. Acad. Sci. Petrop. VII (1734/35). 1740. P. 184 – 200) опубликованной

в 1740 г., которая, как видно даже из самого ее названия, относится к геометрии, точнее, к геометрии так называемых изогональных траекторий. Традиция возводить историю уравнений с частными производными к указанной работе Л. Эйлера восходит к концу XVIII в., в частности к Ж. А. Кузену, который выдвинул соответствую-

щий тезис в противовес господствовавшему тогда мнению, связывавшему начало теории с работами Даламбера 40-ых гг.,– мнению, к которому сегодня вернулись. Работа же Эйлера 1740 г. пред-

ставляет лишь предысторию исследований новой области: занимаясь геометрическими задачами, Л. Эйлер встретился с дифференциальными уравнениями с частными производными, не придав, судя по всему, должного значения открывшимся перед ним объектам. Интуитивно ощущая нетривиальный их смысл, он уделил им больше внимания, чем это требовала приведшая к ним задача. Однако соответствующая часть работы, мало связанная с рассматриваемыми геометрическими задачами, не приобрела и самостоятельного значения; открывшийся впоследствии смысл ее не был ясен даже самому автору, тем более его современникам. Лишь потом, задним числом, об этих результатах вспомнили его последователи, пытаясь (и, как мы видим, успешно) утвердить его приоритет.

Попробую обосновать это заключение, рассмотрев соответствующую работу Эйлера 1740 г. (см. ИМИ, 1975, вып. 20, с. 204 – 220), то есть статью «Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis» (Дополнение к рассуждению о бесконечном количестве кривых одного и того же рода), опубликованную в 1740 г. в 7 томе Записок Императорской Петербургской Академии наук (Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae) за 1734 – 1735 гг. В начале статьи речь идет о следующей задаче: пусть в выражении дифференциала функции z

$$dz = P(x, a)\,dx + Q(x, a)\,da \qquad (9)$$

задана функция $P(x, a)$, требуется найти функцию $Q(x, a)$, т. е. в наших обозначениях задано уравнение

$$\partial z/\partial x = P(x, a),$$

требуется определить $\partial z/\partial a$. Исходя из условия, что (9) — полный дифференциал $\left(\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$, Эйлер получил

$$Q = \int \frac{\partial P(x, a)}{\partial a}\,dx. \qquad (10)$$

Если этот интеграл можно вычислить, то поставленная задача решена, но если этот интеграл не берется, нельзя ли все же определить Q хотя бы как функцию x, a и z? Эйлер приводит пример, когда такое определение возможно без интегрирования: пусть функция $z(x, a)$ — однородная степени 0, тогда по известному свойству однородных функций имеет место равенство

$$P(x, a)\, x + Q(x, a)\, a = 0;$$

следовательно,

$$Q = -Px/a. \tag{11а}$$

Эйлер обращает задачу: известно, что

$$Q = -Px/a,$$

определить наиболее общий вид P. Выражение (9) с учетом (11а) принимает вид

$$dz = P\left(dx - \frac{x\,da}{a}\right).$$

Отметив, что P является множителем, делающим последнее выражение интегрируемым, Эйлер замечает, что в качестве P можно взять любую функцию вида

$$\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a} + c\right), \tag{11б}$$

тогда

$$dz = f\left(\frac{x}{a} + c\right) d\left(\frac{x}{a} + c\right)$$

и

$$z = \int f\left(\frac{x}{a} + c\right) d\left(\frac{x}{a} + c\right).$$

У Эйлера это выражение отсутствует, и у него окончательным является выражение (11б) для P.

С современной точки зрения равенство (11а) — уравнение с частными производными вида

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{x}{a}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{11в}$$

а $z = \int f\left(\frac{x}{a}+c\right) d\left(\frac{x}{a}+c\right)$ — его решение. Для Эйлера (11а) — соотношение, связывающее P и Q, из которого, выяснив наиболее общий возможный вид функции $P\left(=\frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}+c\right)\right)$, мы находим Q при условии, что заданное P имеет соответствующий вид (например, $P = \frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}+2}$). Таким образом, результат Эйлера таков: если $P(x, a) = \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}+c\right)$, то $Q(x, a) = -\frac{Px}{a} = -\frac{x}{a^2}f\left(\frac{x}{a}+c\right)$.

Эйлер замечает, что в качестве функций $P(x, a)$ и $Q(x, a)$ можно взять более общие выражения: $X(x) + \frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ и $A(a) - \frac{x}{a^2}f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ соответственно ($X(x)$, $A(a)$ — произвольные функции).

Далее Эйлер начинает усложнять тип зависимости между $P(x, a)$ и $Q(x, a)$. Пусть

$$Q = -nPx/a, \tag{12а}$$

где n — некоторое число, тогда рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к выражению для

$$P = \frac{1}{a^n} f\left(\frac{x}{a^n} + c\right), \tag{12б}$$

а следовательно, и для

$$Q = -\frac{nx}{a^{n+1}} f\left(\frac{x}{a^{n+1}} + c\right):$$

С современной точки зрения равенство (11а) — уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{nx}{a}\frac{\partial z}{\partial x}, \tag{12в}$$

а $z = \int P(x, a)\,dx + \int Q(x, a)\,da$ — общее решение этого уравнения. Для Эйлера это соотношение, из которого он находит наиболее общее выражение для $P(x, a)$ и которое позволяет, зная $P(x, a)$, найти $Q(x, a)$, не прибегая к интегрированию (10). Таким образом, если $P(x, a)$ задано в форме (12б), то сразу можно записать $Q(x, a)$ по формуле (12а).

Здесь, как и в предыдущем случае, Эйлер замечает, что для P и Q можно взять более общие выражения, прибавив к найденным какие угодно функции, зависящие только от x для P и только от a для Q.

Далее Эйлер рассматривает случай Q = P E(a), где E(a) – некоторая функция от a.

Далее он усложняет тип зависимости между P(x, a) и Q (x, a). В итоге можно составить таблицу из трёх столбцов (Эйлер этого не делает) – в первом поместим рассматриваемые Эйлером зависимости между P и Q, во втором – найденные им выражения для P, в третьем – соответствующие зависимости из первого столбца, записанные в современных обозначениях:

1. $Q = -\frac{Px}{a}$ (11а)	$\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ (11б)	$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{\partial z}{\partial x}\frac{x}{a}$ (11в)
2. $Q = -\frac{nPx}{a}$ (12а) (n — число)	$\frac{1}{a^n} f\left(\frac{x}{a^n} + c\right)$ (12б)	$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{nx}{a}\frac{\partial z}{\partial x}$ (12в)
3. $Q = P \cdot E(a)$, (13а) где $E(a)$ — функция a	$f(x + A(a))$, (13б) где $A(a) = \int E(a)\,da$	$\frac{\partial z}{\partial a} = E(a)\frac{\partial z}{\partial x}$ (13в)
4. $Q = PY(x)$, (14а) где $Y(x)$ — функция x	$\frac{1}{Y(x)} f(X(x) + a)$, (14б) где $X(x) = \int \frac{dx}{Y(x)}$	$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x} Y(x)$ (14в)
5. $Q = PE(a)Y(x)$,	$dX(x)$ … $f(X(x) + A(a))$	∂z … ∂z … $E(a)Y(x)$

С нашей точки зрения, выражения (11а), (12а), (13а) и т.д. являются дифференциальными уравнениями первого порядка (11в), (12в), (13в) и т.д., а развиваемые Эйлером методы достаточны для построения решений этих уравнений. Однако в постановке задачи интегрирования дифференциального уравнения с частными производными и той задачи, которую ставил перед собой Л. Эйлер, имеется различие. Его задача — по заданному P, если оно имеет вид (11б) — (20б) (при соответствующем выборе функции f), найти, не прибегая к интегрированию (10), по формулам (11а) — (20а) выражения для Q. Особенно отчетливо различие в этих двух подходах ощущается, когда Эйлер переходит к рассмотрению выражений, которые мы могли бы трактовать как уравнения порядка, большего двух.

Итак, в рассмотренной работе Эйлера, написанной в связи с геометрическими задачами, содержатся первые ростки теории уравнений с частными производными. Строго говоря, можно говорить лишь об одном уравнении - $\partial z/\partial x = P(x,a)$, для которого ставится задача нахождения не z, но $\partial z/\partial a$.

Все остальные выражения, которые с нашей точки зрения можно трактовать как дифференциальные уравнения с частными производными первого, второго и третьего порядков, имеют смысл совершенно отличный от нашего.

Таким образом, усматривать в этой работе начало теории уравнений с частными производными, на мой взгляд, соверешенно неправомерно.

Своё начало эта теория берёт в работах Ж. Даламбера, к рассмотрению которых мы и переходим.

Ж. Даламбер (d'Alembert J.; 1717 – 1783)

1717 – родился в Париже
1735 – окончил Коллеж Мазарини
1741 – избрание в Парижскую АН
1743 – «Трактат по динамике»
1747 – «Размышления о природе ветров»
– избрание в Берлинскую АН
– исследование о колебании струны
– совместно с Дидро начал работать над «Энциклопедией»
1754 – избрание во Французскую Академию
1761 – 1780 – Opuscules mathématiques. Т. 1 – 8.
1772 – непременный секретарь Французской Академии
1783 – скончался в Париже

Réflexions sur la cause générale des vents. Paris. 1747

В этой работе,

удостоенной премии Берлинской академии наук за 1746 г., Даламбер, рассматривая Землю как твердый шар, покрытый воздушной оболочкой (в ряде случаев двумя оболочками — водяной и воздушной), изучает колебания воздушной оболочки (ветры!!) под действием собственного вращения Земли вокруг своей оси, а также притяжения Луной и Солнцем. Точка зрения Даламбера на природу ветров оказалась несостоятельной (см., например, [6]), что послужило, вероятно, причиной того невнимания, с которым историки науки обходят этот труд Даламбера, в то время как содержащиеся в нем аэродинамические и математические результаты приобрели непреходящее значение.

Уравнениям с частными производными посвящена третья, последняя часть книги, в которой Даламбер исследует задачу о движении потока воздуха внутри канала, образованного двумя параллельными цепями гор,

под действием сил, указанных выше. Эта задача приводит к дифференциальным уравнениям с частными производными и к некоторым краевым задачам для этих уравнений.

Запись дифференциальных уравнений с частными производными в работах Даламбера отлична от современной. Так, на стр. 164 он формулирует следующую задачу. Даны два дифференциальных выражения

$$\alpha(u, s)\,ds + \beta(u, s)\,du, \tag{1}$$

$$\rho\alpha(u, s)\,du + \nu\beta(u, s)\,ds + A(u, s)\,du + \Gamma(u, s)\,ds,$$

в которых ρ и ν — отличные от нуля (предположение, специально не сделанное, но необходимое по смыслу рассуждений Даламбера) константы, а $A(u, s)$ и $\Gamma(u, s)$ — данные функции u и s; об этих выражениях известно, что каждое — полный дифференциал некоторых функций z и v от u и s; требуется определить α и β (в специальных задачах, некоторые из них будут рассмотрены ниже, также z и v).

Сформулированная задача согласно условию полного дифференциала Эйлера, постоянно применяемому Даламбером, приводит к системе уравнений для α и β:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\alpha}{\partial u}=\frac{\partial\beta}{\partial s},\\ \nu\frac{\partial\beta}{\partial u}=\rho\frac{\partial\alpha}{\partial s}+\Phi(u,\ s),\end{gathered}\tag{1'}$$

из которой нетрудно получить привычные для нас уравнения для z и v:

$$\begin{gathered}\nu\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\rho\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=\Phi(u,\ s),\\ \nu\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}=F(u,\ s).\end{gathered}\tag{1''}$$

В рассматриваемом сочинении приводятся лишь записи вида (1) и (1′).

Обозначив $n = \nu/\rho$ и разделив второе из выражений (1) на $\rho\sqrt{n}$, Даламбер получает

$$\frac{\alpha}{\sqrt{n}}du + \beta\sqrt{n}\,ds + \frac{A(u,\ s)}{\sqrt{n}\,\rho}du + \frac{\Gamma(u,\ s)}{\sqrt{n}\,\rho}ds. \qquad (2)$$

Сложив выражение (2) с первым из системы (1) и обозначив $\alpha + \beta\sqrt{n} = m$, $\frac{u}{\sqrt{n}} + s = t$, он приходит к выражению вида

$$mdt + \Psi(s,\ t)\,dt + \Pi(s,\ t)\,ds,$$

в котором $\psi(s,\ t)$ и $\Pi(s,\ t)$ — известные функции и которое должно быть полным дифференциалом некоторой функции от s и t. Тогда согласно условиям Эйлера должно выполняться равенство

$$\frac{\partial m}{\partial s} + \frac{\partial\Psi(s,\ t)}{\partial s} = \frac{\partial\Pi(s,\ t)}{\partial t},$$

из которого определяется m:

$$m = -\Psi(s,\ t) + \int\frac{\partial\Pi(s,\ t)}{\partial t}ds + \varphi(t),$$

где *φ(t)* – произвольная функция *t*. Вычитая (2) из

первого выражения системы (1) и обозначая $\mu = \beta\sqrt{n} - \alpha$, $y = \frac{u}{\sqrt{n}} - s$, Даламбер получает, рассуждая, как в предыдущем случае,

$$\mu = -\mathrm{H}(y,\ s) + \int \frac{\partial \Theta (y,\ s)}{\partial y} ds + \psi (y),$$

где $\mathrm{H}(y,\ s)$, $\Theta (y,\ s)$ — известные функции, а $\psi (y)$ — произвольная функция y.

Зная μ и m, легко находятся α и β (а затем z и v).

Обсуждая случай $n < 0$, Даламбер пишет: «Это не помешает интегрированию, ибо (п. 79) всегда можно заставить исчезнуть мнимости из α и β, если эти количества должны быть вещественными» [5, стр. 166]. Таким образом, используя современную терминологию, можно сказать, что Даламбер не различал гиперболический и эллиптический случай уравнений (1″) и задачу интегрирования системы

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial s},\quad \frac{\partial \alpha}{\partial s} = -\frac{\partial \beta}{\partial u} \tag{3}$$

считал бы полностью завершенной, получив решение в виде

$$\alpha = \frac{\varphi (u - \sqrt{-1}\, s) - \psi (u + \sqrt{-1}\, s)}{2\sqrt{-1}},$$

$$\beta = \frac{\psi (u + \sqrt{-1}\, s) + \varphi (u - \sqrt{-1}\, s)}{2},$$

где $\varphi (t)$ и $\psi (t)$ — произвольные функции t.

Прием, предложенный Даламбером для решения системы (1), является разновидностью общего метода множителей, применявшегося им ранее для решения обыкновенных уравнений и их систем (см., например, [9]), — метода множителей, являвшегося развитием классического метода интегрирующего множителя для уравнения

$$dy - f(x, y)\,dx = 0$$

(метод множителей был использован Эйлером в упомянутой работе [7]). Применительно к уравнениям с частными производными он состоит в основных чертах в следующем: из дифференциальных выражений, составляющих систему, подобную рассмотренной выше (1), образуют линейные комбинации с числовыми коэффициентами (в других случаях такими коэффициентами могут быть и функции, см. стр. 118) с тем расчетом, чтобы удобными заменами координат и входящих в выражения неизвестных функций можно было получить интегрируемые выражения.

Существенной частью изложенного метода для системы (1) являются замены координат

$$\frac{u}{\sqrt{n}} + s = t,$$

$$s = s$$

и

$$\frac{u}{\sqrt{n}} - s = y,$$

$$s = s.$$

Учитывая, что уравнения характеристик для (1″) будут иметь вид $\frac{u}{\sqrt{n}} + s = C_1$ и $\frac{u}{\sqrt{n}} - s = C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные константы, обозначим эти замены как квазихарактеристические. Если при изложении описанного метода эти замены координат не выделены Даламбером достаточно выпукло, то при описании решения следующей задачи замены координат занимают центральное положение

На с.167 Даламбер формулирует задачу: даны выражения

$$\alpha(u, s)\,ds + \beta(u, s)\,du,$$

$$\rho\alpha(u, s)\,du + p\beta(u, s)\,du + \gamma\beta(u, s)\,ds + m\alpha(u, s)\,ds + \\ + F_1(u, s)\,du + F_2(u, s)\,ds, \qquad (4)$$

в которых ρ, p, γ, m — данные константы, $F_1(u, s)$, $F_2(u, s)$ — данные функции u и s и о которых известно, что каждое — полный дифференциал некоторых функций $z(u, s)$ и $v(u, s)$; требуется определить α и β (а в ряде специальных задач, некоторые из них будут рассмотрены ниже, также z и v).

Согласно условиям Эйлера система (4) приводит к системе уравнений для определения α и β:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = \frac{\partial\beta}{\partial s},$$

$$\rho\frac{\partial\alpha}{\partial s} + p\frac{\partial\beta}{\partial s} = \gamma\frac{\partial\beta}{\partial u} + m\frac{\partial\alpha}{\partial u} + \Phi(u, s), \qquad (4')$$

из которой следует уравнение для z

$$\rho \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + (p - m) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial s} - \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \Phi(u, s) = 0 \qquad (4'')$$

и аналогичное для v (в тексте Даламбера приводятся лишь записи вида (4) и (4′).

Искусно модифицируя метод множителей, Даламбер рассмотрел различные случаи, когда удавалось определить α и β.

Производимые при этом Даламбером замены координат являлись характеристическими или квазихарактеристическими по отношению к соответствующим уравнениям типа $(4'')$.

В заключение третьей, последней части книги Даламбер использовал изложенные методы интегрирования для решения специальных задач аэро- и гидромеханики.

Так, например, одна из задач приводила к поиску решения уравнения, которое в современных обозначениях выглядит так

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial^2 q}{\partial u \partial s} + \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} = 2 \frac{b}{a^2} \cos 2u$$

в предположении $q\big|_{s=0} = q\big|_{s=s_0} = 0$

Замечательно, что в связи с этой краевой задачей мы находим у Даламбера первое упоминание проблемы существования решения краевой задачи:

«Если мы не сможем удовлетворить этому условию, - пишет Даламбер на с.177, – беря самое общее выражение q, то это означает, что q не может быть выражено функцией от u и s, и, таким образом, проблема, взятая в этом смысле, невозможна».

Заметим, во-первых, что Даламбер очень чуток к проблемам оснований (и в этом нам ещё придётся убедиться с Вами в дальнейшем), хотя, и это уже во-вторых, замечание это появилось в результате недоразумения – метод Даламбера позволяет без особого труда получить решение в явном виде (см. Демидов С.С. Дифференциальные уравнения с частными производными в работах Ж. Даламбера // Историко-математические исследования. Вып. 19. 1974. С. 98 – 124) – почему Даламбер этого не заметил, можно только гадать.

На стр. 182 приводится система из двух дифференциальных выражений

$$dk = \nu dt + \beta ds,$$

$$d\alpha = \varepsilon\beta dt + \varepsilon\nu ds + A(s)\,ds - B\sin 2\left(s - \frac{bt}{\theta}\right) ds,$$

где $\varepsilon > 0$ и B — константы, $A(s)$ — некоторая известная функция.

Требуется найти α и k в предположении, что k при $t=0$ обращается в заданную функцию от s, а α — в нуль. Используя современную терминологию, можно сказать, что речь идет о решении задачи Коши при начальных условиях $k|_{t=0} = G(s)$ и $\alpha|_{t=0} = 0$ для системы

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial k}{\partial s},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial s} = \varepsilon\frac{\partial k}{\partial t} + A(s) - B\sin 2\left(s - \frac{bt}{\theta}\right). \qquad (9)$$

Это решение Даламбер выписывает в явном виде, определяя произвольные функции, входящие в решение, через начальные условия.

В работе «Размышления о природе ветров» содержатся методы пригодные для интегрирования систем уравнений типа $(1^{'})$, $(4^{'})$ или соответствующих им уравнений $(1^{''})$ и $(4^{''})$. Эти методы, представляющие собой разновидности общего метода Даламбера – метода множителей, предлагают использование замен входящих в уравнения функций, а также координат. Используемые Даламбером замены координат являются либо квазихарактеристическими, либо характеристическими по отношению к уравнениям $(1^{''})$ или $(4^{''})$. Однако, в отличие от замен Эйлера, введённых им позднее – об этом речь ещё впереди), замены Даламбера осуществляются в дифференциальных выражениях (1) и (4), а не в соответствующих уравнениях.

Именно методы Даламбера, приспособленные к работе с выражениями в полных дифференциалах, определили форму записи Даламбером уравнений с частными производными – в виде выражений в полных дифференциалах.

Заметим, что первое появление уравнения с частными производными у Даламбера датируется 1743 годом – тогда в «Трактате по динамике» Даламбер рассмотрел задачу колебаний подвешенной за один конец весомой нити

$$ddy = \left[\frac{dy}{ds} - (l - s)\frac{ddy}{ds^2}\right] dt^2 \text{ или}$$
$$= q - (l - s)\frac{dq}{ds} \ \left(p = \frac{\partial y}{\partial t}, q = \frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

Проинтегрировать это уравнение он тогда не мог. Открытые им в 1746 году (опубл. в 1747) методы для этого также не годились. Его решение методом разделения переменных он дал только в 1758 во втором издании «Трактата по динамике» (см. Даламбер Ж. Динамика. М.: Гостехиздат.1950). В работе рассмотрен ряд задач, в которых решение уравнений ищется при некоторых граничных условиях. В частности, он ставил и решал задачу Коши для системы (9).

Трактат «Размышления о природе ветров» положил таким образом начало теории уравнений с частными производными – в нём такие уравнения впервые выступили как самостоятельный объект исследований, хотя сами такие уравнения появились в литературе раньше: примером этому служит уравнение колебаний подвешенной за один конец весомой нити, приведённое выше.