Демидов С.С.

История математического анализа в XVII – XX вв.
Избранные главы:

Из истории теории дифференциальных уравнений с частными производными

Осенний семестр 2023 г.

Лекция 11

19 и 20 проблемы Гильберта

«Одним из наиболее замечательных обстоятельств в основах теории аналитических функций я считаю то, что существуют дифференциальные уравнения с частными производными, все интегралы которых необходимо являются аналитическими функциями своих независимых переменных; короче говоря, эти уравнения допускают только аналитические решения», - такими словами начинается текст 19 проблемы.

«Наиболее известные дифференциальные уравнения в частных производных этого рода это уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

и известные дифференциальные уравнения, исследованные Пикаром (Journ. Ecole Polytechn. 1890), кроме того дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f ,$$

дифференциальное уравнение минимальных поверхностей и другие.»

Гильберт формулирует следующий вопрос:

обладает ли каждое эллиптическое дифференциальное уравнение «тем свойством, что оно допускает только аналитические интегралы, даже если, как в случае задачи Дирихле, граничные значения непрерывные, но не аналитические».

20-я проблема, тесно связанная с 19-й, ставится Гильбертом следующим образом: не допускает ли решение каждое эллиптическое дифференциальное уравнение, «если только на данные граничные условия наложены определённые допущения, например, непрерывность или кусочная дифференцируемость до определённого порядка функций, определяющих условия на границах, – и если в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование».

Замечателен сам порядок задач, выбранный Гильбертом. Казалось бы логично вначале поставить вопрос о существовании решения граничной задачи для эллиптических уравнений (20-я проблема), а лишь затем вопрос о его гладкости (19-я проблема). Избранный же Гильбертом порядок указывает на то, что вопрос ставился об априорных свойствах решения. Такой подход привёл к современной теории априорных оценок, которая позволяет из наличия априорной оценки некоторой нормы решения вывести заключение о существовании самого решения. Современная постановка 20-й проблемы Гильберта такова: «Если имеется априорная ограниченность каких-либо слабых норм всех возможных решений краевой задачи (например, их максимумов модулей), то имеется и её разрешимость» (Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. 1964. С. 11).

Замечательным является и то, что ставя задачу существования решения граничной задачи для эллиптического уравнения, Гильберт говорит не о классическом решении, а об обобщенном («если в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование»), понятие которого еще не было введено в математику. Сделанное Гильбертом указание на возможность обобщения понятия решения – одно из первых (если не первое!) в истории математики, хотя де-факто такие решения появлялись и ранее. Еще Л.Эйлер, допуская в качестве функций, задающих начальную форму струны, произвольные непрерывные (в его терминологии – «разрывные») функции, по существу, рассматривал обобщенные решения. По существу, обобщённое решение уравнения Лапласа рассматривает Б. Риман в своей знаменитой диссертации «Основания общей теории функций одного комплексного переменного» (1851). Как новое математическое понятие, обобщённые решения использовали М. Бохер, Н. Винер, К. Фридрихс, Ж. Лерэ, С.Л. Соболев.

Девятнадцатая и двадцатая проблемы определили основное направление развития всей теории квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений в XX веке. Эта область стала одной из наиболее активно и успешно разрабатываемых ветвей математики столетия. Её активно разрабатывали в Германии и в США (ученики Гильберта, Э. Хопф, Л. Ниренберг, Ч. Морри), в СССР (С.Н. Бернштейн, И.Г. Петровский, О.А. Ладыженская и др.) и Италии (Л. Тонелли, Э. де Джорджи, Э. Джусти, М. Миранда и др.)

Девятнадцатая проблема одна из первых, поддавшаяся усилиям математиков, сыграла важную роль в развитии теории дифференциальных уравнений с частными производными. Первого крупного успеха в её решении добился наш соотечественник – математик из Одессы Сергей Натанович Бернштейн

С.Н. Бернштейн

1880 – родился в Одессе в семье физиолога Н.О. Бернштейна

1900 – 1904 – учился в Парижской высшей электротехн. школе и в Парижском университете (доктор математических наук)

1904 – 1905 – жил в Гёттингене

1905 – переезд в Санкт-Петербург

1907 – 1908 – профессор Женских политехнических курсов

1908 – 1920 – профессор Высших женских курсов в Харькове

1908 – 1932 – прив.-доцент, доцент, проф. Харьковского ун-та

1924 – член-кор. АН СССР и УССР

1925 – академик АН УССР

1928 – член-кор. АН Франции

1929 – академик АН СССР

1932 – переезд в Ленинград, сотрудник мат. отдела Физ.-мат. ин-та

1935 – переезд вместе с Институтом им. Стеклова в Москву

1945 – член АН Франции

1968 – умер в Москве

Первое решение 19 проблемы было получено С.Н. Бернштейном в 1903 году в предположении, что решение априори принадлежит C_3:

Bernstein S.N. Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre // Comptes Rendus. 1903. Vol. 37. P. 778 – 781.

Bernstein S.N. Sur la nature analytique des solutions des equations aux derivees partielles du seconde ordre // Mathematische Annalen. 1904. Bd. 59. S. 20—76.

Вслед за исследованиями Бернштейна последовали многочисленные исследования советских, немецких, итальянских и американских учёных, в которых эти результаты развивались и обобщались.

Так И.Г. Петровский (ДАН СССР. 1937. Т. 17. С. 339 – 342; Матем. Сбор. 1939. Т. 5 (47). С. 3 – 68) показал аналитичность всех достаточно гладких решений аналитических систем эллиптического типа.

Благодаря усилиям ряда математиков (E. Hopf, G. Stampaccia, C. Morrey и др.) требуемую априорную гладкость для регулярной вариационной задачи удалось снизить до C_1.

Решение 20 проблемы шло в основном в направлении вариационных задач. Для этой цели в работах Гильберта, Р. Куранта и др. разрабатывались так называемые «прямые» методы вариационного исчисления. Большое значение имели также топологический метод Лерэ -Шаудера и метод априорных оценок, появившийся в работах Бернштейна. Прямыми методами было доказано существование обобщённых решений вариационной задачи, суммируемых с некоторой степенью m> 1 вместе со своими первыми производными (L. Tonelli, C. Morrey). Однако, как мы видим, этот класс значительно шире того, для которого доказана 19-я проблема – C_1. Возникает задача: соединить результаты по 19 и 20 проблемам. Однако, даже для двумерного случая такое соединение долгое время не удавалось. Наконец, в 1957 году итальянскому математику Эннио де Джорджи удалось его получить для регулярных функционалов вида

$$\int_G F(u_x)dx \qquad u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

при условии квадратичного роста F относительно переменной u_x .

А в 1960 году О.А. Ладыженская и Н.Н. Уральцева (ДАН СССР.1960. Т. 135. № 8. С. 1330 – 1333) решили эту задачу для общего регулярного функционала.

Эннио де Джорджи
1928 – 1996

О.А. Ладыженская
1922 – 2004

Ольга Александровна Ладыженская

1922 – родилась в г. Кологрив Костромской губернии в семье учителя

1937 – арестован и расстрелян отец

1939 – 1941 – студентка Ленинградского пединститута

1943 – 1947 – студентка МГУ (руководитель И.Г. Петровский)

1947 – 1949 – аспирантка МГУ, ЛГУ (руководитель С.Л. Соболев)

1949 – кандидат физ-мат наук

1950 – начала работать на кафедре высшей математики физфака ЛГУ

1954 – научный сотрудник Ленинградского отделения МИАН СССР

– доктор физ-мат наук

1981 – член-корреспондент АН СССР

1990 – академик АН СССР

2004 – скончалась в Санкт-Петербурге

2021 – Межд. матем. союзом учреждена медаль О. Ладыженской за работы по математической физике

Член Европ. АН, Нац. акад. деи Линчеи, Амер. акад. наук и искусств и др.

Прем. П.Л.Чебышева (1966), С.В.Ковалевской (1992), Больш. зол. медаль М.В. Ломоносова (2002), Гос. премия СССР (1969)

Демидов С.С. К истории проблем Гильберта // Историко-математические исследования. Вып. 17. 1966. С. 91 – 122.

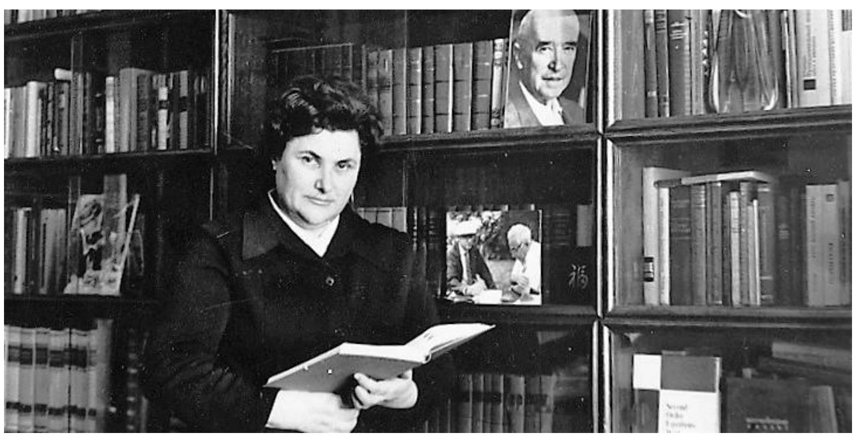
Рыбников К.А., Демидов С.С. К истории проблем Гильберта // История и методология естественных наук. Вып. 9. 1970. С. 150 – 154.

Демидов С.С. Предыстория девятнадцатой проблемы Гильберта // История и методология естественных наук. Вып. 11. 1971. С. 69 – 79.

Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука. 1973.

И.Г. Петровский (1901 – 1973)

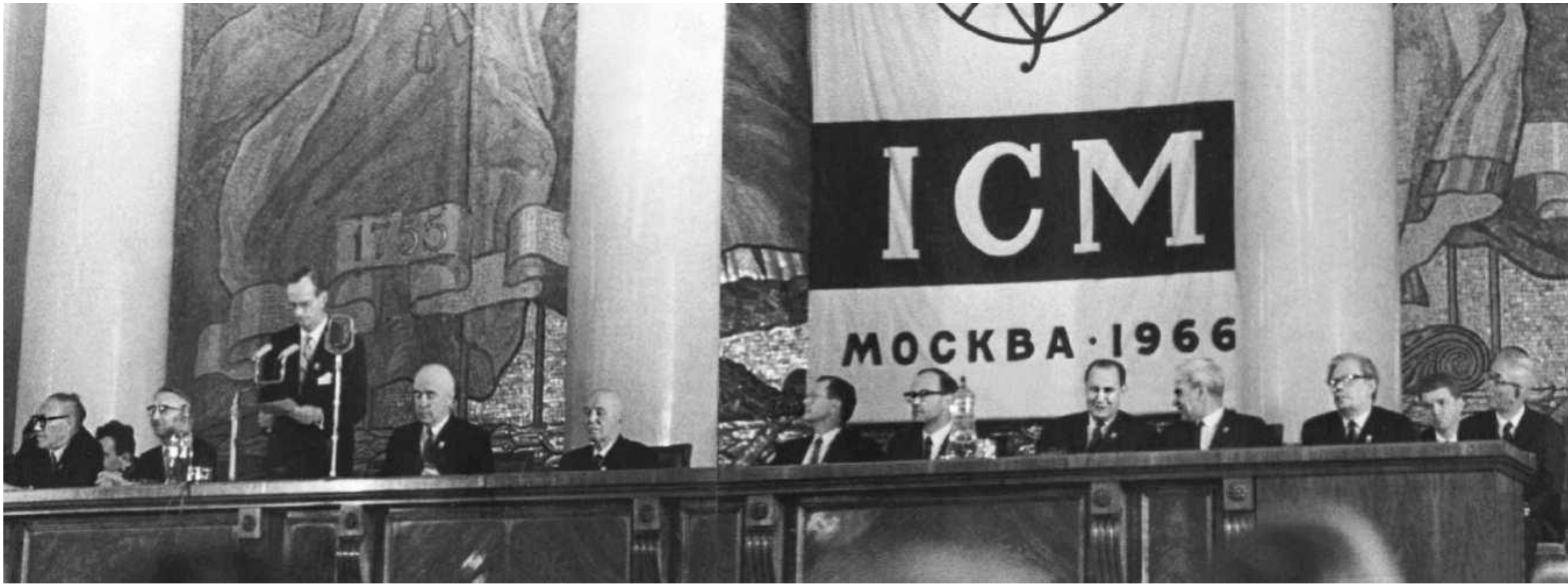
С.Л. Соболев (1908 – 1989)



О.А. Олейник (1925 – 2001)

О.А. Ладыженская (1922 - 2004)


СОВМЕСТНЫЙ СОВЕТСКО-АМЕРИКАНСКИЙ
СИМПОЗИУМ ПО УРАВНЕНИЯМ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
НОВОСИБИРСК август-1963


1755
ICM
МОСКВА·1966