Демидов С.С.

История математического анализа в XVII – XX вв.
Избранные главы:

Из истории теории дифференциальных уравнений с частными производными

Осенний семестр 2023 г.

Лекция 10

Созданная Софусом Ли геометрическая теория дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка стала одним из наиболее ярких достижений математики XIX столетия. Построить аналогичную теорию для уравнений второго и более высоких порядков – такую задачу ставил перед собой ещё С. Ли и над её решением трудились математики высокого калибра (среди них Д.Ф. Егоров) – оказалось возможным лишь с использованием математического аппарата выстроенного уже на протяжении второй половины XX века. Один из таких подходов был реализован в школе А.М. Виноградова – список теорий, в которых он вёл исследования и которые он использовал для выстраивания геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными порядка выше первого, мы привели, рассказывая его биографию. С самого начала XX века и вплоть до 70-ых годов в исследованиях по теории дифференциальных уравнений с частными производными доминировал взгляд на общую теорию как прежде всего на теорию граничных задач для уравнений математической физики. Общая геометрическая теория была вытеснена с авансцены как малоэффективное направление исследований. Изменение взглядов произошло буквально на наших глазах. Для того, чтобы увидеть как это случилось вернёмся ненадолго в 18 – 19 века.

Уравнения математической физики

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{(Даламбер 1747)}$$

В 1759 году Эйлер представил Берлинской Академии наук три большие работы о распространении звука. В них он пришёл к уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

Задачу о колебании мембраны Эйлер свёл (1764) к уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

известному теперь как уравнение цилиндрических волн

Линейные уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2P\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (P^2 - Q^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + R\frac{\partial z}{\partial y} + S\frac{\partial z}{\partial x} + Tz + V = 0$$

(Эйлер, 3 том «Интегрального исчисления» (1770)), для интегрирования которого он использовал метод характеристических координат.

Метод каскадов Лапласа (Mém. Acad. Sci. Paris (1773) 1777)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \beta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial z}{\partial x} + \delta\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T = 0$$

Уравнения математической физики

Метод каскадов Лапласа (Mém. Acad. Sci. Paris (1773) 1777) – метод интегрирования уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T = 0,$$

где α, β, γ, δ, λ, T – функции *x* и *y*, и $\alpha^2 > 4\beta$ (то есть уравнение, с нашей точки зрения, является гиперболическим) (см. Петрова С.С. К истории метода каскадов // Историко –математические исследования. 1974. Вы. 19. С. 125 – 131)

Б. Риман в работе «О распространении плоских волн конечной амплитуды», опубл. в 1860 г. в трудах Гёттингенской академии наук (Риман. Сочинения. М.-Л. 1948. С. 376 – 395) предложил «метод интегрирования Римана», позволяющий получить в явном виде решение задачи Коши для гиперболических уравнений 2-го порядка с двумя независимыми переменными.

Уравнения математической физики

Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

встречается уже в работах Даламбера и Эйлера, но особое значение оно приобрело в работах Лапласа по теории потенциала, в частности во втором томе его «Трактата по небесной механике» (Paris, 1799). Лаплас установил связь введённого Лагранжем объёмного потенциала с уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

После этих работ Лапласа это уравнение получило широкую известность, как уравнение выражающее сущность стационарных процессов. Исследования по интегрированию уравнения Лапласа и краевых задач для эллиптических уравнений с частными производными были продолжены К. Гауссом, Дж. Грином, С.Д. Пуассоном, П.Г. Дирихле, К. Нейманом и др.

Уравнения математической физики

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$ (1807, Ж. Фурье)

1822 Ж. Фурье «Аналитическая теория теплоты»

Развитие метода Фурье: С.Д. Пуассон, П.Г. Дирихле, М.В. Остроградский

Для каждого из приведённых уравнений математической физики были (из физических соображений !) поставлены свои краевые задачи. Особое место среди таких задач заняла начальная задача или, как её стали называть, задача Коши. Как уже было сказано в одной из предыдущих лекций, в 1874 году С.В. Ковалевская теорему существования и единственности аналитического решения этой задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными при аналитичности начальных данных и функций, задающих уравнения, а также в предположении, что рассматриваемая система имеет нормальную форму (см. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз. 1961).

В 1889 г. появилась статья П. Дюбуа Реймона (1831 – 1889) «О линейных дифференциальных уравнениях второго порядка» (Crelle's Journ.) 1889. Bd. 104, 241 – 301), в которой вводилась современная классификация уравнений по типам: уравнение

$$A(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)z + f(x,y) = 0$$

$\delta = B^2 - AC < 0$ – эллиптическое уравнение,

$\delta = 0$ – параболическое,

$\delta > 0$ – гиперболическое.

Классическими примерами уравнений этих типов служат, соотв.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (5)$$

Одна из краевых задач для уравнения Лапласа (3) носит имя Дирихле: на достаточно гладкой границе Г некоторой конечной области *D* плоскости (*x, y*) задана непрерывная функция φ (*x, y*); требуется найти функцию *u* (*x, y*) такую, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ внутри *D* и *u на* Г обращается в φ (*x, y*).

Другая известная краевая задача для уравнения Лапласа – задача К. Неймана: на достаточно гладкой границе Г некоторой конечной области D плоскости (x, y) задана непрерывная функция φ (*x, y*); требуется найти функцию *u* (*x, y*) такую, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ внутри *D* и $\frac{\partial u}{\partial n}$ на Г обращается в φ (*x, y*).

Оказывается краевые задачи имеет смысл рассматривать лишь по отношению к определённым типам уравнений. Поставим задачу Коши для уравнения Лапласа (3) таким образом: найти функцию *u* (*x, y*), удовлетворяющую этому уравнению в области $y > 0$ при условиях $u\,(x,0) = 0,\ u_y(x,0) = \psi\,(x)$. Известно, что функция, гармоническая в области, у которой граница содержит прямолинейный отрезок, и равная нулю на этом отрезке, может быть гармонически продолжена на него и через него. Так как производная гармонической функции есть гармоническая функция, то $u_y(x,y)$ является гармонической функцией, следовательно, $u_y(x, y)$ – аналитическая функция x при y = 0, поэтому $\psi\ (x)$ обязана быть аналитической. Однако многочисленные задачи физики сводятся к задачам с неаналитическими начальными данными. Кажется вполне естественным поэтому такое решение проблемы: заданные начальные функции в рассматриваемой части плоскости *y = 0* равномерно аппроксимировать многочленами. Такой шаг был бы физически обоснован, если бы из равномерной аппроксимации при *y = 0* получалась бы равномерная аппроксимация при

$y > 0$[1].

В рассматриваемом случае это оказывается совсем не так. В 1917 году на заседании математического общества в Цюрихе Жак Адамар доложил следующий, принадлежащий ему пример; он положил в рассматриваемой задаче $\psi(x) = \frac{1}{n^k} \sin nx$, тогда $z(x, y) = \frac{1}{n^{k+1}} \operatorname{sh} ny \sin nx$ будет ее решением (n и k — положительные постоянные). Так как $|z'_y(0, x)| \leqslant \frac{1}{n^k}$, то при достаточно большом n $|z'_y(0, x)|$ будет сколь угодно малым для любых x. В то же время полученное нами решение задачи Коши будет принимать сколь угодно большие значения при сколь угодно малых значениях y, если n достаточно велико. Таким образом, рассматриваемая задача оказыва-

[1] Действительно, условия Коши на практике не могут быть найдены с абсолютной точностью, поэтому для естествознания представляют интерес лишь корректные задачи.

ется некорректной. (Будем, следуя Адамару, называть задачу корректной, если её решение существует, единственно и непрерывно зависит от краевых данных.) Следовательно, при постановке краевых задач встаёт вопрос об их корректности. Известно, что поставленные выше краевые задачи для уравнений (3) – (5) корректны и в случае более общих уравнений соответствующего типа и приводят к некорректным задачам, когда они ставятся для уравнений иных типов.

1. Таким образом, сегодня для исследуемого уравнения ставится краевая задача (постановка задачи варьируется в зависимости от типа уравнения) и уравнение рассматривается в совокупности с краевыми условиями.

2. Основные вопросы исследования краевой задачи — вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости решений от начальных данных.

Такой взгляд на теорию краевых задач сформировался уже в в первой половине XX столетия, когда исследования по этой теории стали доминировать в тематике уравнений с частными производными, когда под общей теорией таких уравнений стали понимать общую теорию краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Так начали строить курсы по теории дифференциальных уравений с частными производными.

Goursat E. Cours d’analyse mathématique. V. 3. 4-e éd. Paris. 1924 – 25.

Что касается общей геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными, то исследования в этой области ушли с авансцены мировой математической мысли и стали почтенным её направлением, развиваемым отдельными искусными геометрами вроде Э. Картана или Ж. Драша. Как показали исследования того же С. Ли, А. Пуанкаре и др. математиков, феномен уравнений, обладающих интегралами, представимыми в замкнутой форме, оказался скорее исключением из правил. Поэтому на передний план вышли методы приближённого интегрирования, а следовательно особо важную роль стали играть теоремы существования решения различных краевых задач для таких уравнений. Характерно мнение одного из крупнейших специалистов в области теории уравнений с частными производными первой половины XX столетия Р. Куранта (1888 – 1972), высказанное на пороге 60-ых годов на 159 странице его замечательной книги:

Courant R. Partial Differential Equations. New York – London. 1962.

Цитирую по русскому переводу Т.Д. Вентцель: Курант Рихард. Уравнения с частными производными. М.: Мир. 1964.

«Вопросы, связанные с дифференциальными уравнениями в частных производных порядка выше первого, настолько разнообразны, что построение единой общей теории … не представляется возможным. Существенное различие имеется между несколькими типами дифференциальных уравнений, называемых “эллиптическими”, “гиперболическими” и “параболическими”; уравнения каждого из названных типов обладают совершенно разными чертами в вопросах, касающихся построения решений и их свойств».

Казалось бы в устах одного из классиков математики XX в., каким безусловно являлся Р. Курант, такая оценка должна служить смертельным приговором всему направлению – общей геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными порядка выше первого. Однако, во второй половине века ситуация начала меняться и эти изменения носили кардинальный характер. Важно заметить, что основной импульс к переменам произошёл не из чистой математики, но из физики. Именно там открылась важность вполне интегрируемых уравнений.

Хотя такие уравнения и представляют собой большую редкость, но как к этому времени выяснилось, они играют в физике особо важную роль. Замечательный пример таких уравнений – уравнение Кортевега–де-Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

описывающее движение волн на мелкой воде, акустические волны в кристаллах, передачу электрических сигналов по нерву. Это уравнение оказывается вполне интегрируемым.

Таким образом, естествознание выдвинуло казавшийся экзотикой объект – интегрируемые уравнения – на переднюю линию современных исследований. Математики вернулись к казалось забытым результатам по интегрируемым системам С. Ли, А. Бэклунда, Г. Дарбу. Вновь оказались востребованными, как мы уже говорили, работы по интегрированию дифференциальных уравнений с частными производными Д.Ф. Егорова.

Замечательно то, что к этому времени был уже создан математический аппарат, с помощью которого оказалось возможным такую теорию строить. Усилиями Г. Гольдшмидта, С. Стернберга и др. её стали развивать в рамках теории дифференцируемых многообразий. В результате синтеза этой теории, коммутативной и гомологической алгебры, алгебраической топологии, алгебраической и дифференциальной геометрии стали возможны достижения в этой области. Геометрическим аналогом нелинейных уравнений оказались очень сложные, зачастую бесконечномерные геометрические объекты с различными структурами (характеристическими конусами, L-лучами и т.д.).

Рассказанная история свидетельствует о сложности задачи прогнозирования развития математики. Как я только что говорил, даже маститый Курант не смог предвидеть такого развития событий. Что Курант ? Даже его учитель, великий Гильберт, вряд ли мог предугадать такой поворот.

Впрочем, заговорив о Гильберте, уместно в конце нашего курса вернуться к его докладу 1900 года, речь о котором шла уже на первых лекциях. В этом докладе Гильберт поставил две проблемы, относящиеся к тематике уравнений с частными производными. Обе они (19-я и 20-я) относятся к эллиптическим уравнениям. Здесь Гильберт стоит на передовых позициях своего времени – геометрическая теория не находит места среди его приоритетов. Хотя выделение этих двух задач и порядок их постановки свидетельствуют о его необычайной дальновидности.

19 и 20 проблемы Гильберта

«Одним из наиболее замечательных обстоятельств в основах теории аналитических функций я считаю то, что существуют дифференциальные уравнения с частными производными, все интегралы которых необходимо являются аналитическими функциями своих независимых переменных; короче говоря, эти уравнения допускают только аналитические решения», - такими словами начинается текст 19 проблемы.

«Наиболее известные дифференциальные уравнения в частных производных этого рода это уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

и известные дифференциальные уравнения, исследованные Пикаром (Journ. Ecole Polytechn. 1890), кроме того дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f ,$$

дифференциальное уравнение минимальных поверхностей и другие.»

Гильберт формулирует следующий вопрос:

обладает ли каждое эллиптическое дифференциальное уравнение «тем свойством, что оно допускает только аналитические интегралы, даже если, как в случае задачи Дирихле, граничные значения непрерывные, но не аналитические».

20-я проблема, тесно связанная с 19-й, ставится Гильбертом следующим образом: не допускает ли решение каждое эллиптическое дифференциальное уравнение, «если только на данные граничные условия наложены определённые допущения, например, непрерывность или кусочная дифференцируемость до определённого порядка функций, определяющих условия на границах, – и если в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование».

Замечателен сам порядок задач, выбранный Гильбертом. Казалось бы логично вначале поставить вопрос о существовании решения граничной задачи для эллиптических уравнений (20-я проблема), а лишь затем вопрос о его гладкости (19-я проблема). Избранный же Гильбертом порядок указывает на то, что вопрос ставился об априорных свойствах решения. Такой подход привёл к современной теории априорных оценок, которая позволяет из наличия априорной оценки некоторой нормы решения вывести заключение о существовании самого решения. Современная постановка 20-й проблемы Гильберта такова: «Если имеется априорная ограниченность каких-либо слабых норм всех возможных решений краевой задачи (например, их максимумов модулей), то имеется и её разрешимость» (Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. 1964. С. 11).

Замечательным является и то, что ставя задачу существования решения граничной задачи для эллиптического уравнения, Гильберт говорит не о классическом решении, а об обобщенном («если в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование»), понятие которого еще не было введено в математику. Сделанное Гильбертом указание на возможность обобщения понятия решения – одно из первых (если не первое!) в истории математики, хотя де-факто такие решения появлялись и ранее. Еще Л.Эйлер, допуская в качестве функций, задающих начальную форму струны, произвольные непрерывные (в его терминологии – «разрывные») функции, по существу, рассматривал обобщенные решения. По существу, обобщённое решение уравнения Лапласа рассматривает Б. Риман в своей знаменитой диссертации «Основания общей теории функций одного комплексного переменного» (1851). Как новое математическое понятие, обобщённые решения использовали М. Бохер, Н. Винер, К. Фридрихс, Ж. Лерэ, С.Л. Соболев.

Девятнадцатая и двадцатая проблемы определили основное направление развития всей теории квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений в XX веке. Эта область стала одной из наиболее активно и успешно разрабатываемых ветвей математики столетия. Её активно разрабатывали в Германии и в США (ученики Гильберта, Э. Хопф, Л. Ниренберг, Ч. Морри), в СССР (С.Н. Бернштейн, И.Г. Петровский, О.А. Ладыженская и др.) и Италии (Л. Тонелли, Э. де Джорджи, Э. Джусти, М. Миранда и др.)

Девятнадцатая проблема одна из первых, поддавшаяся усилиям математиков, сыграла важную роль в развитии теории дифференциальных уравнений с частными производными. Первого крупного успеха в её решении добился наш соотечественник – математик из Одессы Сергей Натанович Бернштейн

Первое доказательство аналитичности решений уравнения Лапласа, не отличающееся от доказательств приводимых в современных учебниках по теории аналитических функций, мы находим в книге 1865 года К. Неймана о принципе Дирихле. Из этого доказательства следует, что, по-видимому, представлялось Нейману самым существенным, бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Однако последнее было хорошо известно уже Б. Риману: он доказал это в своей докторской диссертации «Основания теории функций комплексного переменного», защищённой в Гёттингене в 1851 году. В п. 10 он доказал такую теорему: «Если функция *u* на некоторой поверхности, разостланной без покрытий на плоскости *A*, удовлетворяет, вообще говоря, уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (3)$$

или, точнее говоря, если:

1) точки, в которых уравнение не выполняется, не заполняют никакой части плоскости;
2) точки, в которых u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ имеют разрывы, не заполняют никакой кривой,
3) если имеются такие точки разрыва, то при бесконечно малых расстояниях ρ точки *O* от точки разрыва величины $\rho\frac{\partial u}{\partial \ldots}$ и $\rho\frac{\partial u}{\partial \ldots}$ также

бесконечно малы;

4) не существует точек, в которых разрывы устранялись бы изменением одного значения функции,

то во всех точках, расположенных внутри данной поверхности, функция u конечна и непрерывна, так же, как и её частные производные всех порядков».

В пункте 1 требуется, чтобы нарушения уравнения (3) не мешали выполнению интегрального равенства

$$\iint\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dxdy = 0,$$

где двойной интеграл берётся по произвольной подобласти *T* рассматриваемой поверхности. П. 2 можно уточнить таким образом: множ. точек разрыва функций u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ не может и иметь точек сгущения внутри *T*.

Доказательство Римана, основанное на использовании формулы Грина, сводится к выводу соотношения

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_S \log r\frac{\partial u}{\partial \rho} - u\frac{d\log r}{\partial \rho}) ds,$$

которое Риман получил в предположении непрерывности $u(x, y)$ в точке (x_0, y_0) ($\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{d\log r}{\partial \rho}$ – производные в направлении внутренней нормали, S – контур, охватывающий точку (x_0 , y_0)). Рассматривая это выражение и учитывая условия 1 – 4, получаем утверждение теоремы.

Особая ценность этого результата Римана состоит в том, что он дал доказательство бесконечной дифференцируемости не для случая классического решения уравнения Лапласа, а для некоторого обобщённого его решения – функции, удовлетворяющей интегральному равенству

$$\iint_{\mathrm{T}_1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx\, dy = 0 \ ,$$

где T_1 – любая область, лежащая внутри заданной области (сам Риман формулирует это в виде условия 1), и условиям 2 – 4.

Иными словами, Риман доказал, что любая функция, удовлетворяющая условиям 2 – 4, если она удовлетворяет в обобщённом смысле 1 уравнению (3), является не только классическим решением этого уравнения, но будет функцией бесконечно дифференцируемой.

Ученик Римана Г. Вебер в 1868 г. обобщил этот результат на уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ + $k^2 u$ = 0.

Б. Риман (1826 – 1866)

В 1890 г. Э. Пикар, исследуя уравнение

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial u}{\partial x} + 2E\frac{\partial u}{\partial y} + F\,u = 0, \qquad (6)$$

(где *A, B, C, D, E, F* – действительные аналитические функции переменных *x, y*) в области *T* плоскости *x, y* , в которой $B^2 - AC < 0$, доказал, что каждое дважды непрерывно дифференцируемое в области *T* решение этого уравнения – функция аналитическая в этой области (Journ. de l'Ecole Polytechn. 1890. Cah. 60. P. 89 – 105).

Пикар использовал для этого метод последовательных приближений, восходивший к О. Коши. Этот метод он широко использовал в доказательствах теорем существования решений дифференциальных уравнений. Приведя уравнение (6) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\,u\,,$$

Он составляет систему уравнений

$$\Delta\, u_1 = 0\,,$$

$$\Delta\, u_2 = a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_1}{\partial y} + c\,u_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (7)$$

$$\Delta\, u_n = a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial\, u_{n-1}}{\partial y} + c\,u_{n-1}$$

Рассматривая граничную задачу для (6) с условием $u\backslash_{\Gamma} = \varphi(x, y)$, где Г – замкнутый контур. Пикар решает уравнения системы (7) при условиях $u_1\backslash_{\Gamma} = \varphi(x, y)$, $u_2\backslash_{\Gamma} = u_3\backslash_{\Gamma}$ = …= $u_n\backslash_{\Gamma}$ = 0 и составляет ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (8)$$

Сумма этого ряда (Пикар доказывал его абсолютную и равномерную сходимость при условии достаточной малости контура) представляет собой искомое решение граничной задачи. Пикар показывает, что полученное таким образом решение единственно.

Для доказательства аналитичности решения уравнения (6) он доказывает аналитичность суммы ряда. Как нетрудно доказать, все его члены – функции внутри Г аналитические. Для перенесения этого заключения на сумму ряда (8) Пикар использовал критерий А. Гарнака для распознавания аналитического характера функций по их разложению в ряд Фурье.

Конечно, результат Пикара был оценен Гильбертом, но он был явно недостаточен для выдвижения гипотезы столь большой общности, какой стала его 19 проблема: что аналитическим будет решение каждого эллиптического уравнения, а не только достаточно специального их класса, который составляли линейные уравнения. Конечно, велика была интуиция Гильберта, но в данном случае поддержкой ей стали соображения метафизические. И в данном случае об этом свидетельствовал сам

Давид Гильберт.

С.Н. Бернштейн вспоминал: «Когда я спросил Гильберта, каковы общие соображения, которые привели его к предположению доказанному мною впоследствии, что все решения регулярных задач вариационного исчисления аналитичны, знаменитый геометр ответил, что он считает, что решения всех естественно поставленных задач должны быть аналитическими». Оказывается в основании общих гильбертовских воззрений лежал метафизический принцип, когда-то замечательно сформулированный Лейбницем – «природа не делает скачков».

Итак из приведённых нами слов Бернштейна мы только что узнали, что решение проблемы было получено им, поэтому становится естественным сказать несколько слов об этом выдающемся математике.

О предыстории 19 проблемы Гильберта см.:

Демидов С.С. Предыстория девятнадцатой проблемы Гильберта // История и методология естественных наук. Т. 11. М.: Изд-во Моск. Ун-та. С. 69 – 79