Демидов С.С.

**История математического анализа в XVII – XX вв.
Избранные главы:**

Из истории теории дифференциальных уравнений с частными производными

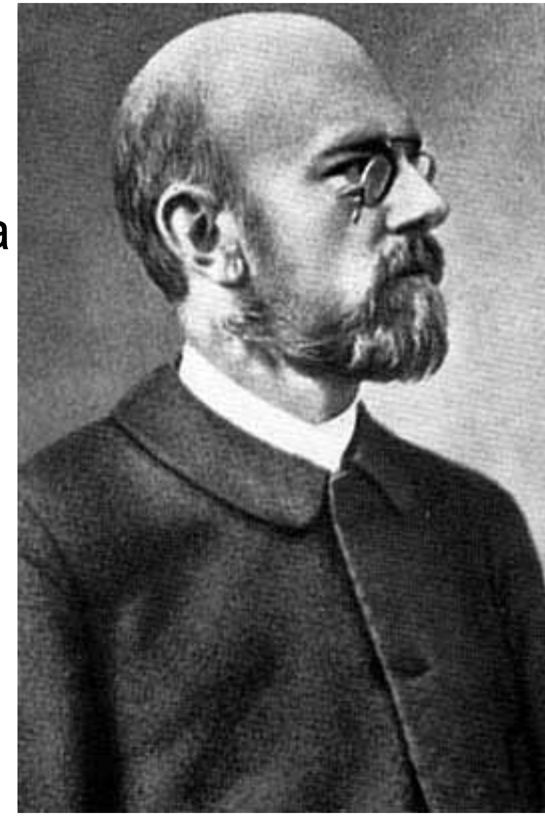
Осенний семестр 2023 г.

Лекция 1

Д. Гильберт «Математические проблемы» Доклад 8 августа 1900 года

6 – 12 августа 1900 года в Париже собрался 2-й Международный конгресс математиков, на котором 8 августа восходящая тогда звезда немецкой математики Д. Гильберт выступил с докладом «Математические проблемы», в котором сделал попытку заглянуть в будущее математики, предложив «несколько определённых проблем из различных математических дисциплин, проблем, исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки».

Опубликованный текст доклада содержал 23 проблемы, на путях решения которых сформировалась значительная часть математики XX века.



Д. Гильберт
(1862 – 1943)

Гильберт Д. «Математические проблемы»

Доклад 8 августа 1900 года

1. Проблема Кантора о мощности континуума
2. Непротиворечивость арифметических аксиом
3. Равенство объёмов двух тетраэдров с равновеликими основаниями и равными высотами
4. Проблема о прямой как о кратчайшем соединении двух точек
5. Понятие непрерывной группы преобразований Ли, без предположения дифференцируемости функций, определяющих группу
6. Математическое изложение аксиом физики
7. Иррациональность и трансцендентность некоторых чисел
8. Проблема простых чисел
9. Доказательство наиболее общего закона взаимности в любом числовом поле
10. Задача разрешимости диофантова уравнения
11. Квадратичные формы с произвольными алгебр. коэффициентами
12. Распространение теоремы Кронекера об абелевых полях на произвольную алгебраическую область рациональности

13. Невозможность решения общего уравнения седьмой степени с помощью функций только от двух аргументов
14. Доказательство конечности некоторой полной системы функций
15. Строгое обоснование исчислительной геометрии Шуберта
16. Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей
17. Представление определённых форм в виде суммы квадратов
18. Построение пространства из когруэнтных многогранников
19. Являются ли решения регулярной вариационной задачи необходимо аналитическими ?
20. Общая задача о граничных условиях
21. Доказательство существования линейных дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии
22. Униформизация аналитических зависимостей с помощью автоморфных функций
23. Развитие методов вариационного исчисления

19 и 20 проблемы Гильберта

обладает ли каждое

дифференциальное уравнение Лагранжа в частных производных для регулярной вариационной задачи тем свойством, что оно допускает только аналитические интегралы[1]), даже если, как в случае задачи Дирихле, граничные значения непрерывные, но не аналитические.

Не

допускает ли решение каждая регулярная вариационная задача, если только на данные граничные условия наложены определенные допущения, например, непрерывность или кусочная дифференцируемость до определенного порядка функций, определяющих условия на границах,— и *если в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование*[1]).

19 и 20 проблемы Гильберта

В 1904 г. С.Н. Бернштейн доказал (Math. Ann. 59. 1904. С. 20 – 76): если *z* – трижды непрерывно дифференци-

руемая функция x и y, удовлетворяющая уравнению

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

где F — аналитическая функция, для которой выполняется неравенство

$$4 \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}}\right)^2 > 0,$$

то *z* аналитична.

Очерк развития теории диф. уравнений с частными производными, составленный в 70-е годы 20 века

Теория дифференциальных уравнений в частных производных возникла в XVIII в. Источниками ее создания явились геометрические и физические задачи, причем последние играли особо важную роль для уравнений порядка выше первого. Геометрические задачи, например, привели к «модулярным» уравнениям (уравнениям, содержащим модуль — параметр), а затем и к рассмотрению таких уравнений, вроде

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=f(x, y, z)$$

(Эйлер, 1734/35, опубликовано в 1740). Различные вопросы физики и механики сводились к многочисленным уравнениям второго и более высоких порядков, например:

уравнение колебаний струны (Даламбер, 1747, опубликовано в 1749) [8]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

уравнение малых колебаний газа (Эйлер, 1760—1761)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

уравнение колебаний мембраны (Эйлер, 1764, опубликовано в 1766)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

уравнение изгибных колебаний пластинки (Эйлер, 1772, опубликовано в 1773)

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}+b^4\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}=0.$$

Если для обыкновенных дифференциальных уравнений элементарные вопросы теории были в достаточной мере выяснены к середине XVIII в., то природа интегралов дифференциальных уравнений в частных производных оставалась в то время довольно загадочной. Это объясняется как принципиально большей сложностью проблемы, так и слабостью аналитического аппарата, с одной стороны, и, еще более недостаточной разработкой пространственной геометрии – с другой. Первая монография по этой теории – третий том «Интегрального исчисления» Л. Эйлера (1770).

В центре эйлеровских построений находится «полный интеграл» дифференц. уравнения с частными производными, содержащий произвольные функции, число которых равно порядку уравнения. При помощи различных замен он старается привести уравнение к такому виду, для которого он может найти полный интеграл. Если это не удается и решение находится в каком-нибудь другом виде, например в виде ряда, то Эйлер не считает свою задачу окончательно решенной.

Очень важно появление у Эйлера формулировки одной из основных краевых задач уравнений с частными производными – начальной задачи. Заметим, что решение этой задачи выделяется им из полного интеграла. Существенную роль в его построениях играл метод характеристик, нашедший у него широкие применения в исследованиях линейных гиперболических уравнений, в частности, при нахождении интеграла уравнения колебания струны. Эйлер затронул по существу все основные вопросы теории уравнений с частными производными (в том числе проблему существования решения краевых задач).

Основы геометрической теории уравнений, особенно первого порядка, заложил Г. Монж, которому принадлежит понятие характеристики (ему принадлежит и сам термин), сыгравшее важную роль в дальнейшем развитии вопроса. В своем «Приложении анализа к геометрии» (1807) Монж строит различные примеры дифференциальных и конечных уравнений поверхностей, заданных способом их образования. Так, например, для цилиндрических поверхностей он получает уравнения

$$ap + bq = 1 \quad \text{и} \quad y - bz = \varphi(x - az),$$

для конических

$$(x - a)p + (y - b)q = z - c \quad \text{и} \quad \frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right),$$

для поверхностей, которые образуются движением проходящей через ось z прямой параллельно плоскости (x, y),

$$px + qy = 0 \quad \text{и} \quad z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Исходя из многочисленных примеров такого сорта, Монж разработал свой метод интегрирования уравнений. Важное значение при том приобрело у него понятие характеристики.

Следует отметить постановку Монжем краевых задач для уравнений с частными производными. Само понятие характеристики у Монжа для уравнений второго порядка сводится к тому, что для некоторой кривой C и развертывающейся поверхности D, задаваемых уравнениями характеристики, задача Коши (как мы бы сказали сегодня) становится неопределенной. Приведем пример еще одной из краевых задач Г. Монжа: «Даны в пространстве две произвольные кривые двоякой кривизны; найти среди всех поверхностей, образованных движением прямой, остающейся всегда параллельной заданной неподвижной плоскости, такую поверхность, которая проходит одновременно через обе кривые» [10, стр. 167]. Иначе это можно переформулировать так: заданы две произвольные кривые двоякой кривизны, найти все решения уравнения

$$(Cq + B)^2 r - 2(Cq + B)(Cp + A)s + (Cp + A)^2 t = 0, \qquad (6)$$

проходящие одновременно через обе эти кривые. Монж, наряду с уравнением (6), строит конечные уравнения этих поверхностей независимо от уравнения (6), которые приобретают у него такой вид:

$$z = x\varphi(Ax + By + Cz) + y\psi(Ax + By + Cz),$$

т. е. задача свелась к нахождению функций φ и ψ таким образом, чтобы получить уравнение искомой индивидуальной поверхности.

Для теории уравнений не столь важны сами результаты Монжа, как введённое им понятие характеристики и его геометрический метод, которые позволили выработать ту новую точку зрения, которая послужила фундаментом для дальнейшего развития теории

В 1822 г. Фурье выпустил в свет «Аналитическую теорию теплоты». По сути дела это математическая теория различных граничных задач для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

Фурье впервые систематически ищет решение в виде тригонометрического ряда. При этом он вновь нашел формулы коэффициентов этого ряда [12], показал, что функции довольно широкого класса представимы на произвольном конечном интервале в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{10}$$

и в значительной мере разъяснил вопрос о возможности изображения функций рядами, который явился предметом споров между Даниилом Бернулли, Даламбером, Эйлером и другими математиками XVIII в.

В работах Пуассона, Дирихле, Остроградского совершенствовался и обобщался метод Фурье, в трудах Гаусса, Пуассона, Грина, Томпсона и Дирихле разрабатывалась теория потенциала.

В дальнейшем математическая физика и общая теория уравнений с частными производными развивались достаточно обособленно друг от друга. Той и другой посвящены свои монографии, свои разделы в «Энциклопедии математических наук»: Sommerfeld A. Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen // Encykl. der math. Wiss., Bd. II – 1, H. 4. Leipzig. 1900; von Weber E. Partiellen Differentialgleichungen // Encykl. der math. Wiss., Bd. II – 1, H. 2 – 3. Leipzig. 1900

Д.Ф. Егоров в 1899 г. писал:

«Аналитическая теория уравнений с частными производными 2-го порядка отделилась от математической физики, благодаря принципиальной разнице в самой постановке вопроса при изыскании интеграла данного уравнения, в зависимости от того, рассматривается ли оно самостоятельно или же как уравнение определенной задачи физики.

Действительно, всякая физическая задача приводит к определению функции, удовлетворяющей не только уравнению с частными производными, но еще некоторым начальным и предельным условиям, в силу которых задача является вполне определенной; искомая функция может быть найдена тем или другим приемом (разложением в ряд, при помощи определенных интегралов), причем в выражение ее не входит никаких произвольных величин. Между тем, если задачей нашей является определение функции, удовлетворяющей только данному уравнению с частными производными, то в выражение этой функции необходимо должны входить произвольные величины, и является желательным определить как степень произвола самого общего решения, так по возможности

и само решение».

3. Первая четверть XIX в. — замечательный период в истории математического анализа. Давно назревавшая необходимость в более строгом обосновании этой науки привела выдающихся математиков (Гаусс, Больцано и особенно Коши, а затем Абель и другие) к ее построению с помощью значительно усовершенствованной теории пределов. Такое построение потребовало уточнения понятий и свойств предела и бесконечно малой, привело к созданию теории сходимости рядов, общей теории интеграла, а затем учения о действительном числе (Дедекинд, Кантор, Вейерштрасс) и теории функций действительного переменного. Уже Коши перестал приписывать всеобщность теоремам анализа и вводил в их формулировки столь привычные нам ограничительные условия на функции. При этом, что особо для нас важно, большое значение начинают придавать проблемам существования исследуемых объектов. Это были проблемы существования пределов последовательностей, первообразных, определенных интегралов и т. д.

Все эти новые идеи вошли и в теорию дифференциальных уравнений. Здесь на первый план выступает проблема

В значительной мере по аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями строится и теория уравнений с частными производными. Для них Коши ставит начальную задачу, которую для уравнений второго порядка можно сформулировать на языке дифференциальной геометрии таким образом: имеем произвольную кривую C и описанную развертывающуюся поверхность D, найти интегральную поверхность уравнения второго порядка, проходящую через C и касающуюся вдоль нее D.

Общий интеграл такого уравнения понимается как соотношение между z, x, y и некоторыми произвольными функциями, которое дает полное решение задачи Коши для *любой кривой* C и *поверхности* D при соответствующем выборе этих функций. Такое определение общего интеграла было впервые высказано, по-видимому, Дарбу [16, стр. 98]. Легко показать, что почти все интегралы уравнения (1) могут быть получены как решения некоторой определенной задачи Коши. Исключение составляют лишь те решения (так называемые «особые» решения), вдоль которых $\partial F/\partial r$, $\partial F/\partial s$, $\partial F/\partial t$ тождественно равны нулю.

Таким образом, задача Коши заняла в общей теории дифференциальных уравнений с частными производными второй половины XIX в. центральное положение. В 1874 г. С. В. Ковалевской была доказана теорема существования и единственности аналитического решения этой задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными при аналитичности начальных данных и функций, задающих уравнения, а также в предположении, что рассматриваемая система имеет нормальную форму.

Построение теории общих решений в смысле Дарбу, положившего в основу задачу Коши, потребовало развития теории характеристик. Такую теорию для уравнений второго порядка мы находим в книге П. Дюбуа Реймона «Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln» (Leipzig, 1864).

В самом начале этой монографии автор высказывает интересную точку зрения, которая стала общепринятой в XX столетии: «Если под общим интегралом понимать аналитическое выражение, содержащее все частные интегралы, то такого, на мой взгляд, вообще говоря, не су-

ществует. … ………………………………………Напротив, дифферен-

циальные уравнения с частными производными приходится рассматривать совместно с граничными значениями как целое и нельзя разрывать их при исследовании»

В статье 1889 г. «Ueber lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung» (Crelle's Journ. 1889. Bd. 104. 241 - 301), которая должна была в какой-то мере восполнить материал недостающего второго выпуска вышеупомянутой книги, Дюбуа Реймон рассмотрел и случай мнимых характеристик и впервые ввел классификацию уравнений (в случае линейных однородных уравнений) по типам: эллиптический ($\delta < 0$), параболический ($\delta = 0$),

гиперболический ($\delta > 0$).

П. Дюбуа Реймон
(1831 – 1889)