Программа кандидатского экзамена по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Алгебра

1. Свободные группы. Теорема Нильсена–Шрайера. Копредставления групп (задание образующими и определяющими соотношениями); примеры. [2, 8]

2. Расширения полей. Базис трансцендентности. Конечные расширения. Алгебраическое замыкание подполя. Алгебраические числа. Сепарабельные расширения. Теорема о примитивном элементе. [5]

3. Поле разложения многочлена. Расширения Галуа. Основная теорема теории Галуа. Группа Галуа кубического многочлена и формула Кардано. Конечные поля. [5, 6, 11]

4. Кольца главных идеалов, их факториальность. Теорема о строении конечнопорожденных модулей над кольцами главных идеалов, её применение к абелевым группам и линейным операторам. [5, 11]

5. Нётеровы кольца и модули. Нётеровость кольца многочленов (теорема Гильберта о базисе идеала). Конечные расширения нётеровых колец. Целое замыкание подкольца. Целозамкнутые кольца. Целые алгебраические числа. Строение аддитивной группы целых чисел поля алгебраических чисел (конечного расширения поля рациональных чисел). [1, 3, 5, 10]

6. Конечнопорожденные коммутативные алгебры и аффинные алгебраические многообразия. Теорема Гильберта о нулях. Топология Зарисского и неприводимые компоненты алгебраического многообразия. Поле рациональных функций и размерность неприводимого алгебраического многообразия. [5, 9, 16]

7. Мономиальные упорядочения. Базис Грёбнера полиномиального идеала. S-полином и алгоритм Бухбергера. Критерии совместности и конечности числа решений системы алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем. [9, 13]

8. Линейные представления групп и ассоциативных алгебр. Неприводимые и вполне приводимые представления. Полная приводимость линейных представлений компактных (в частности, конечных) групп. Морфизмы представлений. Лемма Шура. Изотипные компоненты вполне приводимого представления. Теорема Бернсайда. Неприводимые представления прямого произведения групп. [5, 7, 14, 15]

9. * [1] Радикал ассоциативного кольца. Нильпотентность радикала артинова кольца. Радикал коммутативного кольца. Теорема плотности для полупростых модулей. Строение полупростых артиновых колец. [12, 15, 10]

10. * Циклические алгебры, в том числе обобщенная алгебра кватернионов. Теоремы Фробениуса и Веддербёрна. [12, 15]

11. * Групповая алгебра конечной группы, её полупростота. Центр групповой алгебры и характеры неприводимых представлений конечной группы. Соотношения ортогональности. [5, 15, 14]

12. * Группы Ли и их касательные алгебры Ли. Классические линейные группы Ли. Присоединенное представление группы Ли. Экспоненциальное отображение. Восстановление гомоморфизма связной группы Ли по его дифференциалу. Полная приводимость линейных представлений групп $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{C})$ (унитарный трюк). Неприводимые представления группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. [5, 6]

Список литературы

[1] М. Атья, И. Макдональд. Введение в коммутативную алгебру. М.: Факториал Пресс, 2003.

[2] Ю. А. Бахтурин. Основные структуры современной алгебры. М.: Наука, 1990.

[3] Н. Бурбаки. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.

[4] Б. Л. Ван дер Варден. Алгебра. М.: Наука, 1972.

[5] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.

[6] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть III: Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2009.

[7] К. Кэртис, И. Райнер. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., 1969.

[8] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[9] Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши. Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.

[10] И. Ламбек. Кольца и модули. Факториал, 2005.

[11] С. Ленг. Алгебра. М.: Мир, 1968.

[12] Р. Пирс. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.

[13] В. В. Прасолов. Многочлены. М.: МЦНМО, 2003.

[14] Ж.-П. Серр. Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970.

[15] И. Херстейн. Некоммутативные кольца, М.: Мир, 1972.

[16] И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии, т. 1. М.: Наука, 1988.

Вопросы билетов

1. Свободные группы. Теорема Нильсена-Шрейера. Задание групп образующими и определяющими соотношениями.
2. Расширения полей. Базис трансцендентности.

[1]* Вопросы не входят в программу для аспиратнов кафедр логики и теории чисел

3. Конечные расширения. Поле разложения многочлена.
4. Алгебраическое замыкание подполя. Алгебраические числа. Сепарабельные расширения и теорема о примитивном элементе.
5. Расширения Галуа. Основная теорема теории Галуа. Группа Галуа кубического многочлена и формула Кардано.
6. Конечные поля.
7. Кольца главных идеалов, их факториальность. Теорема о строении конечнопорожденных модулей над кольцами главных идеалов, её применение к абелевым группам и линейным операторам.
8. Нётеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
9. Целое замыкание подкольца. Целозамкнутые кольца. Целые алгебраические числа.
10. Строение аддитивной группы целых чисел поля алгебраических чисел (конечного расширения поля рациональных чисел).
11. Конечнопорожденные коммутативные алгебры и аффинные алгебраические многообразия. Теорема Гильберта о нулях.
12. Топология Зарисского и неприводимые компоненты алгебраического многообразия. Поле рациональных функций и размерность неприводимого алгебраического многообразия.
13. Мономиальные упорядочения. Базис Грёбнера полиномиального идеала. S-полином и алгоритм Бухбергера. Критерии совместности и конечности числа решений системы алгебраических уравнений над алгебраически замкнутым полем.
14. Линейные представления групп и ассоциативных алгебр. Неприводимые и вполне приводимые представления. Полная приводимость линейных представлений компактных (в частности, конечных) групп. Морфизмы представлений. Лемма Шура.
15. Теорема Бернсайда. Неприводимые представления прямого произведения групп.
16. * Радикал ассоциативного кольца. Нильпотентность радикала артинова кольца. Радикал коммутативного кольца.
17. Теорема плотности для полупростых модулей. Строение полупростых артиновых колец.
18. * Циклические алгебры, в том числе обобщенная алгебра кватернионов. Теоремы Фробениуса и Веддербёрна. [12, 15]
19. * Групповая алгебра конечной группы, её полупростота. Центр групповой алгебры и характеры неприводимых представлений конечной группы. Соотношения ортогональности.
20. * Группы Ли и их касательные алгебры Ли. Классические линейные группы Ли. Присоединенное представление группы Ли. Экспоненциальное отображение.
21. * Восстановление гомоморфизма связной группы Ли по его дифференциалу. Полная приводимость линейных представлений групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{C})$ (унитарный трюк). Неприводимые представления группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ кандидатского экзамена по специальности "Математическая логика, алгебра и теория чисел 01.01.06"

Часть 1.

Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча ([ЕП, §§35-37], [КП, гл. 8-11], [Мальцев, §§1-6, 11-12], [Мендельсон, гл. V, §§1-3]).
2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы ([КП, гл. 12], [Мальцев, §§5-6, 12], [Мендельсон, гл. V, §§3-4]).
3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства ([КП, гл. 12], [Мальцев, §13]).
4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи выполнимости булевых формул ([ГД, гл. II, §§2-6], [КП, гл. 16]).
5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы ([ЕП, §§1-6, 12], [Клини, §§1-8], [КП, гл. 2], [Новиков, гл. I]).
6. Исчисление высказываний. Полнота и корректность ([ВШ,гл.2 (2.1-2.2)], [Клини, §§9-12], [КП, гл. 3], [Мендельсон, гл. I, §4]) [Новиков, гл. II, §§ 3-10]).
7. Булевы алгебры. Теорема Стоуна о представлении конечных булевых алгебр. Полнота исчисления высказываний относительно нетривиальных булевых алгебр ([Мальцев, гл. 2, §5], [Скорняков, гл. 2, §§2-4], [Сикорский, §§ 1, 8], [РС, гл. II, 8.1]).
8. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме ([ВШ, §§3.1, 3.2, 4.1, 4.7], [ЕП, §§15-16, 20], [КП, гл. 4-5], [Мендельсон, гл. II, §10] [Новиков, гл. III, §§1-3, 9; гл. IV, §14]).
9. Исчисление предикатов, его корректность. Теорема о дедукции ([ВШ, гл.4 (4.1-4.4)], [ЕП, §§18, 22], [КП, гл. 6], [Мендельсон, гл. II, §§1-4] [Новиков, гл. IV, §§1-8]).
10. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности. Существование бесконечной модели у теории, имеющей конечные модели сколь угодно большой мощности ([ВШ,гл.4 (4.4-4.5)], [ЕП, §17-18, 21-22], [КП, гл. 6], [Мендельсон, гл. II, §5] [Новиков, гл. IV, §16, 19]).
11. Полнота непротиворечивой теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в некоторой бесконечной мощности ([ЕП, §24, 29]).
12. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, её разрешимость и полнота ([Ершов, гл. V, §1], [Мендельсон, гл. II, §12]).
13. Формальная арифметика (система PA). Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства) ([КП, гл. 13 (13.1-13.4)], [Мендельсон, гл. III, §§1-3]).
14. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике ([КП, гл. 13 (13.5-13.6)], [Мендельсон, гл. III, §§4-6]).
15. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов ([ЕП, §§37-38]), [КП, гл. 13 (13.7-13.8)], [Мендельсон, гл. III, §6]).
16. Фильтры, ультрафильтры, ультрапроизведения. Теорема об элементарной эквивалентности алгебраической системы и её ультрастепени ([ЕП, §12, 17]).
17. Критерий аксиоматизируемости и конечной аксиоматизируемости класса алгебраических систем ([ЕП, §25]).

18. Теорема о полноте интуиционистской логики высказываний относительно семантики Крипке ([КП, с. 375-393], [ПХ, с. гл. 7], [ВШ, §2.4]).
19. Теорема о полноте минимальной нормальной модальной логики K относительно семантики Крипке ([Бежанишвили, гл. 1, §1]).
20. Аксиоматическая теория множеств, аксиоматика Цермело — Френкеля, аксиома выбора. Трансфинитная индукция, ординалы и кардиналы. Построение функции на ординалах с помощью трансфинитной рекурсии. Континуум-гипотеза и её независимость (без доказательства) ([ЕП, §§10, 13-14]), [Мендельсон, гл. IV], [Коэн, гл. II, §§3-4, гл. III, §1]).

Список литературы

1. М. Н. Бежанишвили. *Логика модальностей знания и мнения*. М.: УРСС, 2007.
2. Н. К. Верещагин, А. Шень. *Математическая логика и теория алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления*, изд. 4-е. М.: МЦНМО, 2012.
3. М. Гэри, Д. Джонсон. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* М.: Мир, 1982.
4. Ю. Л. Ершов. *Проблемы разрешимости и конструктивные модели.* М.: Наука, 1980.
5. Ю. Л. Ершов, Е.А.Палютин. *Математическая логика*. Изд. 2. М.: Наука, 1987.
6. С. Клини. *Математическая логика*. М.: Мир, 1973.
7. П. Дж. Коэн. *Теория множеств и континуум-гипотеза*. М.: Мир, 1969.
8. В. Н. Крупский, В. Е. Плиско. *Математическая логика и теория алгоритмов*. М.: Академия, 2013.
9. А. И. Мальцев. *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Изд. 2-е. М.: Наука, 1986.
10. Э. Мендельсон. *Введение в математическую логику*. Изд. 3-е. М.: Наука, 1984.
11. П. С. Новиков. *Элементы математической логики*. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973.
12. В. Е. Плиско, В. Х. Хаханян. *Интуиционистская логика*. М.: Изд-во при мех.-мат. ф-те МГУ, 2009.
13. Е. Расёва, Р. Сикорский. *Математика метаматематики.* М.: Наука, 1972.
14. Р. Сикорский. *Булевы алгебры.* М.: Мир, 1969.
15. Л. А. Скорняков. *Элементы общей алгебры.* М.: Наука, 1983.

ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ ДЛЯ ЛОГИКОВ

Часть 1.

Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу. Тезис Чёрча.
2. Понятие алгоритма и его уточнения. Частично рекурсивные функции.
3. Рекурсивно перечислимые и рекурсивные (разрешимые) множества. Их свойства.
4. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества.
5. Алгоритмические проблемы. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.
6. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи.
7. Теорема об NP-полноте задачи выполнимости булевых формул.
8. Исчисление высказываний. Полнота и корректность.
9. Булевы алгебры. Теорема Стоуна о представлении конечных булевых алгебр. Полнота исчисления высказываний относительно нетривиальных булевых алгебр.
10. Исчисление предикатов, его корректность.

11. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.
12. Полнота исчисления предикатов.
13. Теорема Мальцева о компактности. Существование бесконечной модели у теории, имеющей конечные модели сколь угодно большой мощности.
14. Полнота непротиворечивой теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в некоторой бесконечной мощности.
15. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, её разрешимость и полнота.
16. Формальная арифметика (система PA). Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
17. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики.
18. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
19. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики.
20. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для логики предикатов.
21. Фильтры, ультрафильтры, ультрапроизведения. Теорема об элементарной эквивалентности алгебраической системы и её ультрастепени.
22. Критерий аксиоматизируемости и конечной аксиоматизируемости класса алгебраических систем.
23. Теорема о полноте интуиционистской логики высказываний относительно семантики Крипке.
24. Теорема о полноте минимальной нормальной модальной логики K относительно семантики Крипке.
25. Аксиоматическая теория множеств, аксиоматика Цермело — Френкеля, аксиома выбора.
26. Трансфинитная индукция, ординалы и кардиналы. Построение функции на ординалах с помощью трансфинитной рекурсии. Континуум-гипотеза и её неразрешимость (без доказательства).

ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ ДЛЯ АЛГЕБРАИСТОВ

Часть 1.

Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу. Тезис Чёрча.
2. Понятие алгоритма и его уточнения. Частично рекурсивные функции.
3. Рекурсивно перечислимые и рекурсивные (разрешимые) множества. Их свойства.
4. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества.
5. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи.
6. Теорема об NP-полноте задачи выполнимости булевых формул.
7. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
8. Исчисление высказываний. Полнота и корректность.
9. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.
10. Исчисление предикатов, его корректность.
11. Теорема о дедукции для исчисления предикатов.
12. Полнота исчисления предикатов.
13. Теорема Мальцева о компактности. Существование бесконечной модели у теории, имеющей конечные модели сколь угодно большой мощности.

14. Полнота непротиворечивой теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в некоторой бесконечной мощности.
15. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, её разрешимость и полнота.
16. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики.
17. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ
КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ
01.01.06
"Математическая логика, алгебра и теория чисел"
(теоретико-числовая часть)

1. Квадратичный закон взаимности ([3], пп. 1, 2)
2. Первообразные корни и индексы ([3], гл.6).
3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$ ([4], гл.1, п. 4;[9], гл.7, пп. 1-3).
4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел. ([4], гл. 2, пп. 1-3); [5], гл. 5, пп. 1, 2).
5. Характеры и L - функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. ([3], гл. 7; [4], гл. 3, пп. 4, 5; [9], гл. 10, пп. 2-5).
6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений. ([1], гл. 1, пп. 1, 2; [7], гл. 1, пп. 3,4).
7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена. ([6], гл. 1, пп. 1-3; [7], гл. 3, п. 19).
8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм ([8], гл. 7, пп. 1-3).
9. Представление целых чисел в виде суммы двух и четырех квадратов, ([2], гл.32, пп. 1, 2)
10. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами ([8], гл. 7, пп. 4, 6).
11. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел. ([4], гл. 4, пп. 2, 3).
12. * [1] Трансцендентность чисел e и π. ([4], гл. 4, пп. 4, 5).

Список литературы

[1] Боревич З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел, М., Наука, 1985.
[2] Бухштаб А.А., Теория чисел, М., Просвещение,1960.
[3] Виноградов И.М., Основы теории чисел, М., Наука, 1981.
[4] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б., Введение в теорию чисел, М., МГУ, 1995.
[5] Карацуба А.А., Основы аналитической теории чисел, М., Наука, 1983.
[6] Кейперс Л., Нидеррейтер Г., Равномерное распределение последовательностей, М., Наука, 1985.
[7] Коробов Н.М., Тригонометрические суммы и их приложения, М., Наука, 1989.
[8] Серр Ж.П., Курс арифметики, М., Мир, 1972.
[9] Чандрасекхаран К., Введение в аналитическую теорию чисел, М., Мир, 1974.

[1]* Вопросы не входят в программу для аспиратнов кафедр логики и алгебры

ВОПРОСЫ К КАНДИДАТСКОМУ ЭКЗАМЕНУ
по специальности 01.01.06 "Математическая логика, алгебра и теория чисел"
(теоретико-числовая часть)

1. Квадратичный закон взаимности.
2. Первообразные корни и индексы.
3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$
4. Дзета-функция Римана и ее простейшие свойства в области $\mathrm{Re}\, s > 1$ (аналитичность, представление производной и логарифмической производной в виде ряда Дирихле, отсутствие нулей, тождество Эйлера).
5. Аналитическое продолжение дзета-функции.
6. Отсутствие нулей у дзета-функции на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1$.
7. Сведение доказательства асимптотического закона к асимптотике комплексного интеграла.
8. Асимптотика комплексного интеграла в доказательстве асимптотического закона распределения простых чисел.
9. Характеры Дирихле и простые числа в арифметической прогрессии.
10. L - функции Дирихле и их простейшие свойства, аналитичность при $\Re s > 0$ для неглавного характера.
11. Доказательство утверждения $L(1, \chi) \neq 0$.
12. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
13. Модуль гауссовой суммы.
14. Полные рациональные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
15. Критерий Вейля равномерного распределения.
16. Теорема Вейля о равномерном распределении значений многочлена с иррациональным старшим коэффициентом.
17. Представление целых чисел в виде суммы двух квадратов.
18. Представление целых чисел в виде суммы четырех квадратов.
19. Модулярная группа и дробно-линейные преобразования комплексной плоскости.
20. Ряды Эйзенштейна. Разложения в ряд Фурье.
21. Модулярные формы. Теорема о строении алгебры модулярных форм.
22. Модулярный инвариант, поле модулярных функций.
23. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
24. Приближение вещественных чисел рациональными числами. Теорема Дирихле.
25. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
26. * Трансцендентность числа e.
27. * Трансцендентность π.