

К 260-летию Московского университета

Решение проблемы П.Л.Капицы и развитие теории нелинейных волн в жидких пленках

В.Я. Шкадов¹, Е.И. Могилевский¹,
А.Н. Белоглазкин¹, В.П. Шкадова²,
А.И. Алексюк¹

¹Кафедра аэромеханики и газовой динамики,
механико-математический факультет

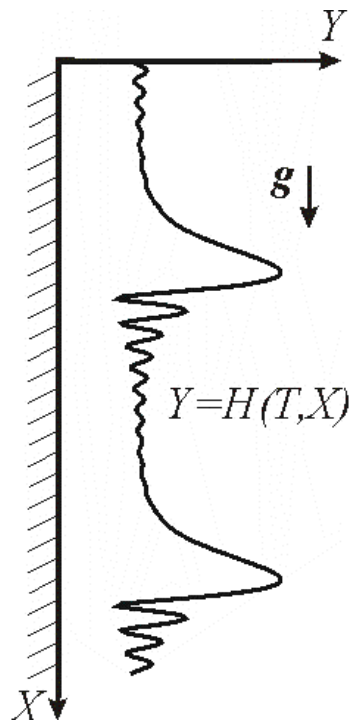
²Институт механики

Содержание доклада

- Классическая задача о стекании пленки (задача Капицы)
 - Линейная устойчивость
 - Слабонелинейные уравнения
 - Нелинейные уравнения Шкадова
- Физические эффекты
 - Неньютоновские жидкости
 - Сильновязкие жидкости
 - Влияние поверхностно-активных веществ
 - Пленки на тонких цилиндрах
- Управление течением пленки
 - Граничный воздушный поток
 - Переменное поле внешних сил
 - Профилирование подложки
 - Электрическое поле

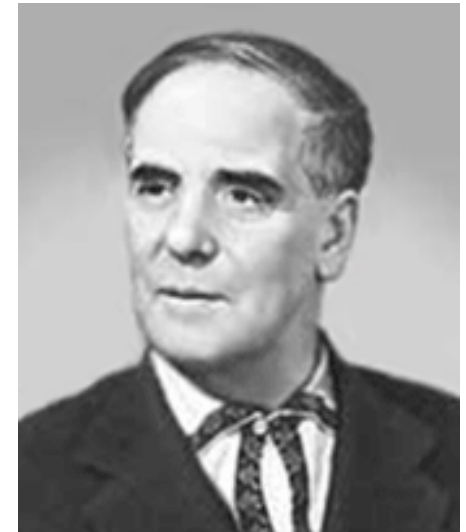
Проблема Капицы

Тонкий слой жидкости стекает по твердой поверхности под действием силы тяжести



ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ТОМ 18 1948 ВЫП. 1

ВОЛНОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ТОНКИХ СЛОЕВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
I. СВОБОДНОЕ ТЕЧЕНИЕ
П. Л. Капица

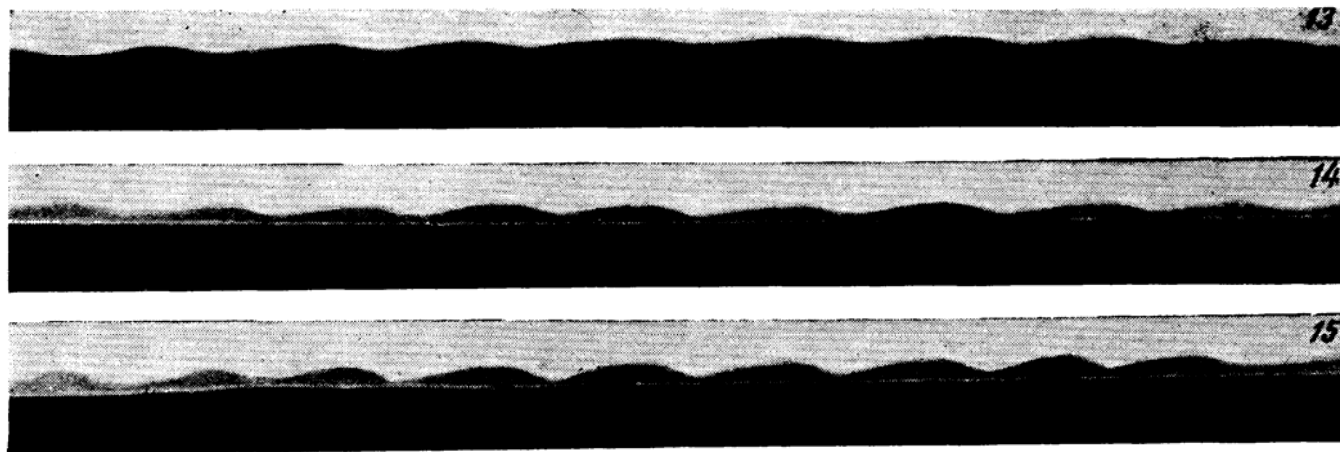


ЖУРНАЛ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ТОМ 19 1949 ВЫП. 2

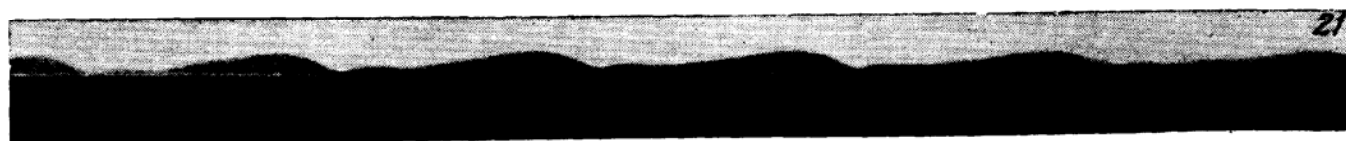
ВОЛНОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ТОНКИХ СЛОЕВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ¹
III. ОПЫТНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВОЛНОВОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ
П. Л. Капица и С. П. Капица

Волновые режимы течения

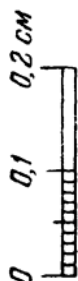
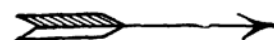
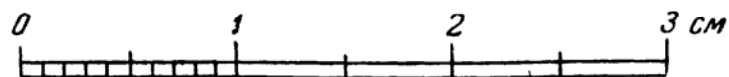
Периодический режим



Промежуточный волновой режим



Одиночные волны



Линейная устойчивость

- Основное течение

$$u = \frac{U}{\bar{U}} = 3 \left(\frac{Y}{H} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{H} \right)^2 \right) \quad V = W = 0 \quad P = \text{const}$$

- Уравнение Орра-Зоммерфельда

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi = i\alpha \text{Re} [(u - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - u'' \varphi]$$
$$y = 0 \quad \varphi = \varphi' = 0$$

$$y = 1 \quad (u - c)(\varphi'' + \alpha^2 \varphi) - u'' \varphi = 0$$
$$\varphi''' - [3\alpha + i\alpha \text{Re}(u - c)] \varphi' + \frac{i\alpha^3 \text{Re}}{\text{We}(u - c)} \varphi = 0$$

$$\text{Re} = \frac{\bar{U}H}{\nu} \quad \text{We} = \frac{\rho \bar{U}H}{\sigma} \quad y = Y/H \quad \bar{U} = \frac{gH^2}{3\nu}$$

Длинноволновое приближение

- Пусть масштаб волн $L, \varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$

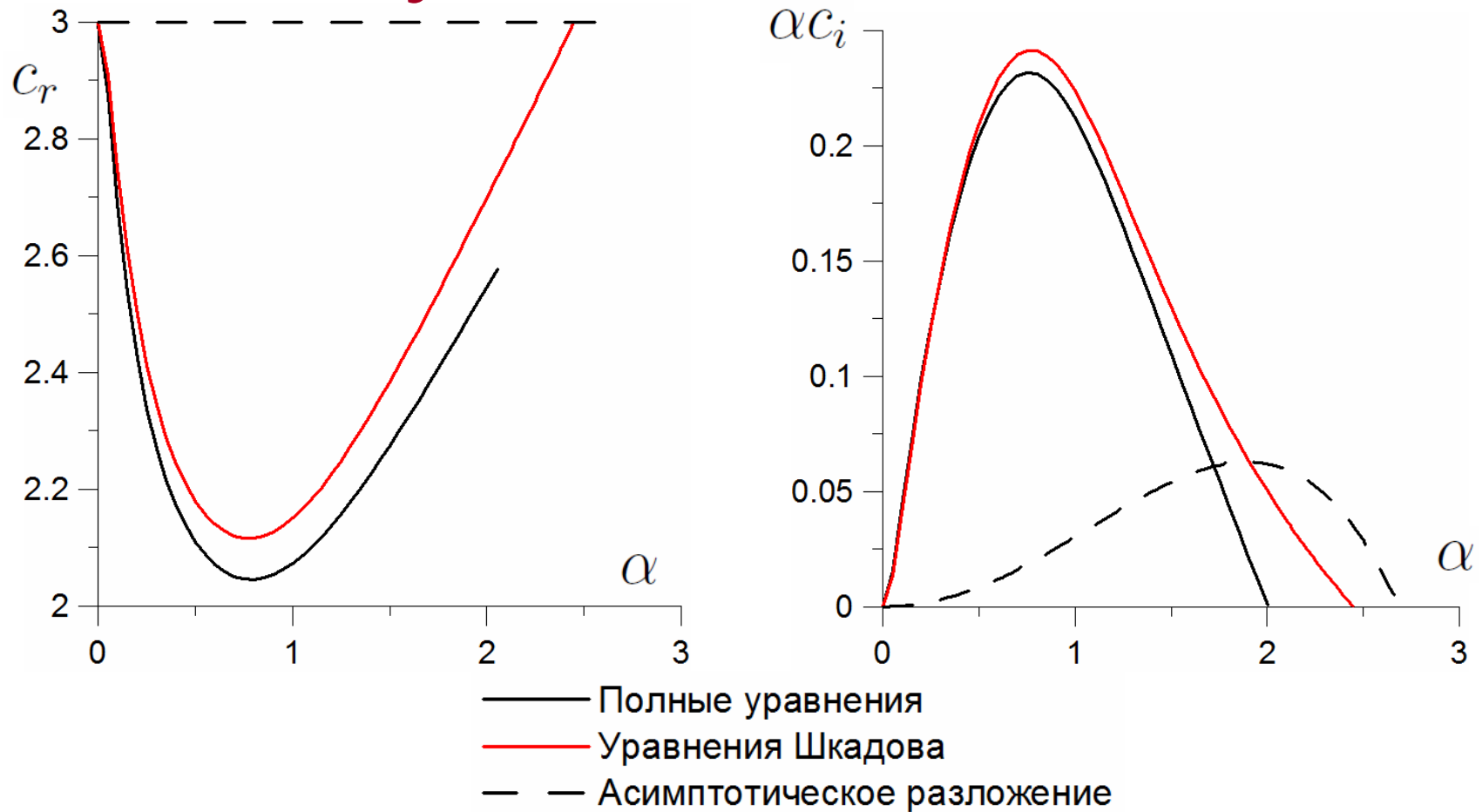
$$\frac{3We}{\varepsilon^2} = \varepsilon Re = 15\delta \quad 15\delta \sim 1, \quad \frac{\varepsilon}{Re} \ll 1$$

- Профиль скорости $u(t, x, y) = 3q(t, x) \left(\frac{y}{h(t, x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h(t, x)} \right)^2 \right)$
- Уравнения Шкадова для интегральных характеристик

$$q_t + \frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h} \right)_x = \frac{1}{5\delta} \left[h h_{xxx} - \frac{q}{h^2} + h \right]$$

$$h_t + q_x = 0$$

Анализ линейной устойчивости



Нелинейные волны

- Произвольное течение

$$q_t + \frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h} \right)_x = \frac{1}{5\delta} \left[h h_{xxx} - \frac{q}{h^2} + h \right]$$

$$h_t + q_x = 0$$

- Регулярные волны

$$q = q_0 + c(h - 1)$$

$$h_{\xi\xi\xi} - \frac{5\delta}{h} \left[\left(\frac{(q_0 + c(h-1))^2}{h} \right)_\xi - c^2 h' + 1 - \frac{q_0 + c(h-1)}{h^3} \right] = 0$$

– Периодически $h(\xi) = h(\xi + 2\pi\alpha_l^{-1}), \quad h_\xi(\xi) = h_\xi(\xi + 2\pi\alpha_l^{-1})$

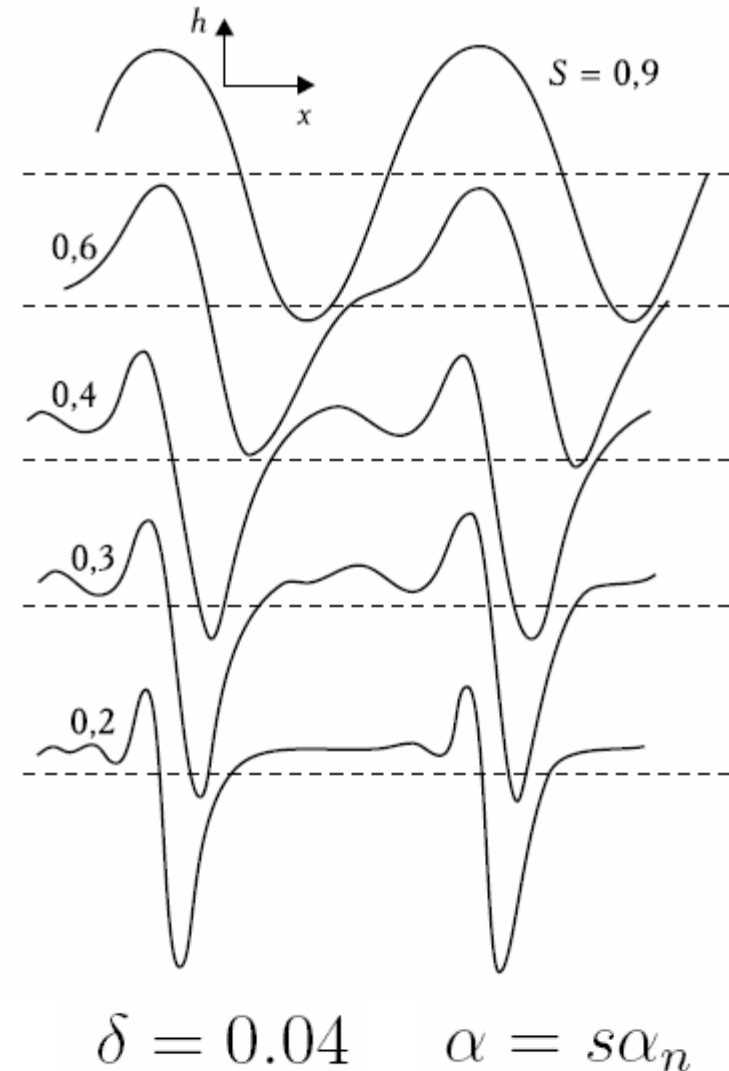
$$h_{\xi\xi}(\xi) = h_{\xi\xi}(\xi + 2\pi\alpha_l^{-1}), \quad \frac{1}{2\pi}\alpha_l \int_{\xi}^{\xi+2\pi\alpha_l^{-1}} h d\xi = 1$$

– Уединенные

$$h(\pm\infty) = 1$$

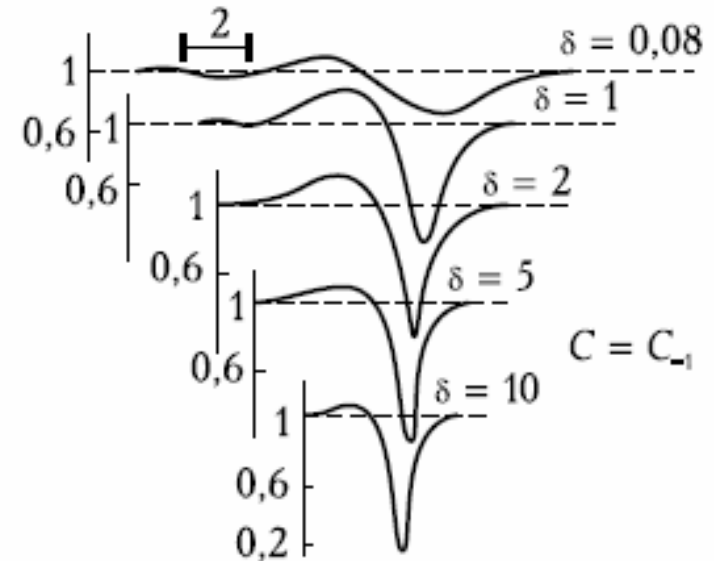
Типы волн

- Первое семейство
Мягкая бифуркация от
невозмущенного течения
Скорость меньше скорости
нейтральных возмущений
Расход меньше, чем в
невозмущенном течении



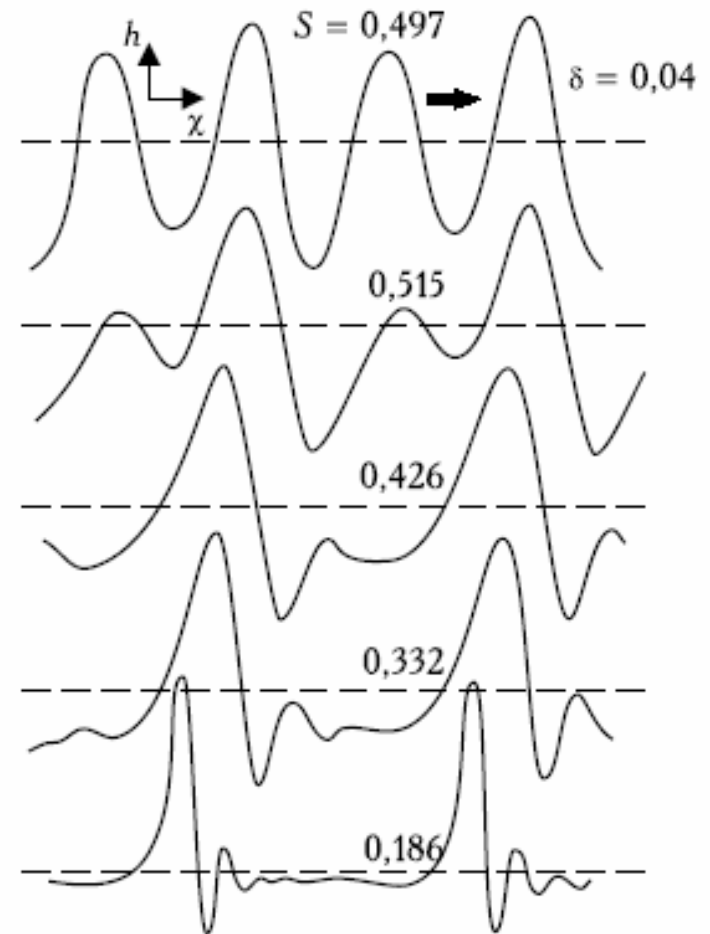
Типы волн

- Отрицательные солитоны
- Предельное состояние
первого семейства
- Скорость меньше скорости
нейтральных возмущений
- Расход меньше, чем в
невозмущенном течении



Типы волн

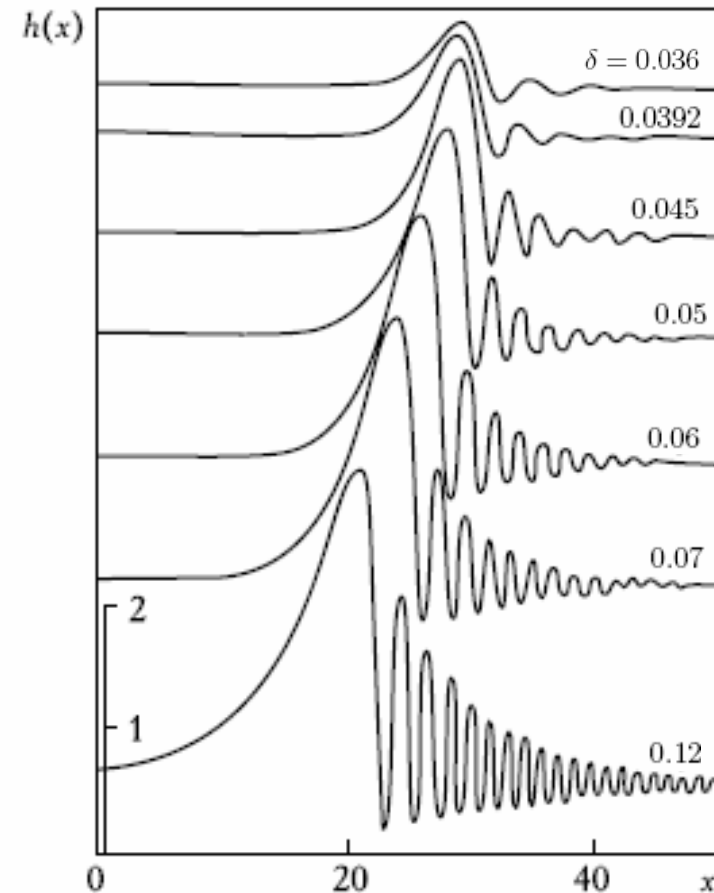
- Второе семейство
- Жесткая бифуркация от первого семейства
- Скорость больше скорости нейтральных возмущений
- Расход больше, чем в невозмущенном течении



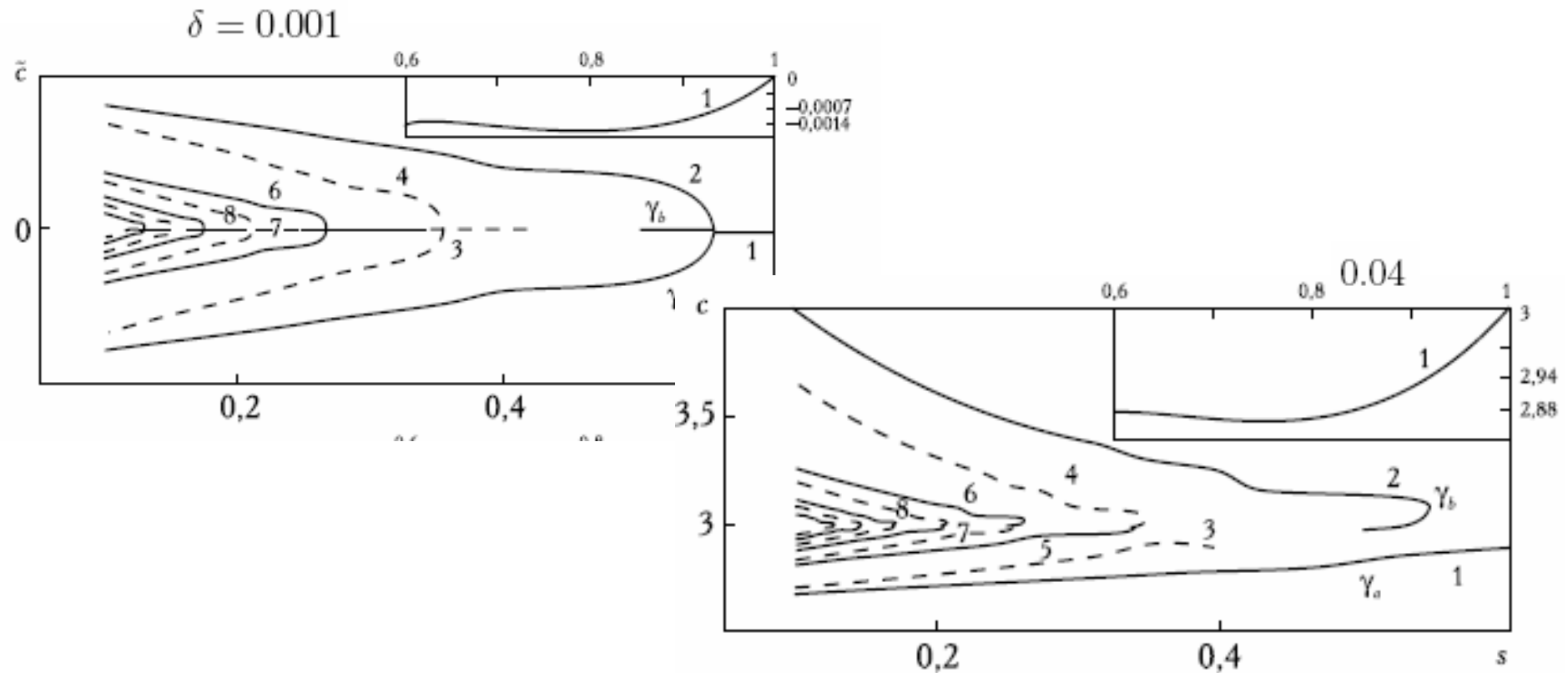
$$\delta = 0.04 \quad \alpha = s\alpha_n$$

Типы волн

- Положительные солитоны
- Предельное состояние
второго семейства
- Скорость больше скорости
нейтральных возмущений
- Расход больше, чем в
невозмущенном течении



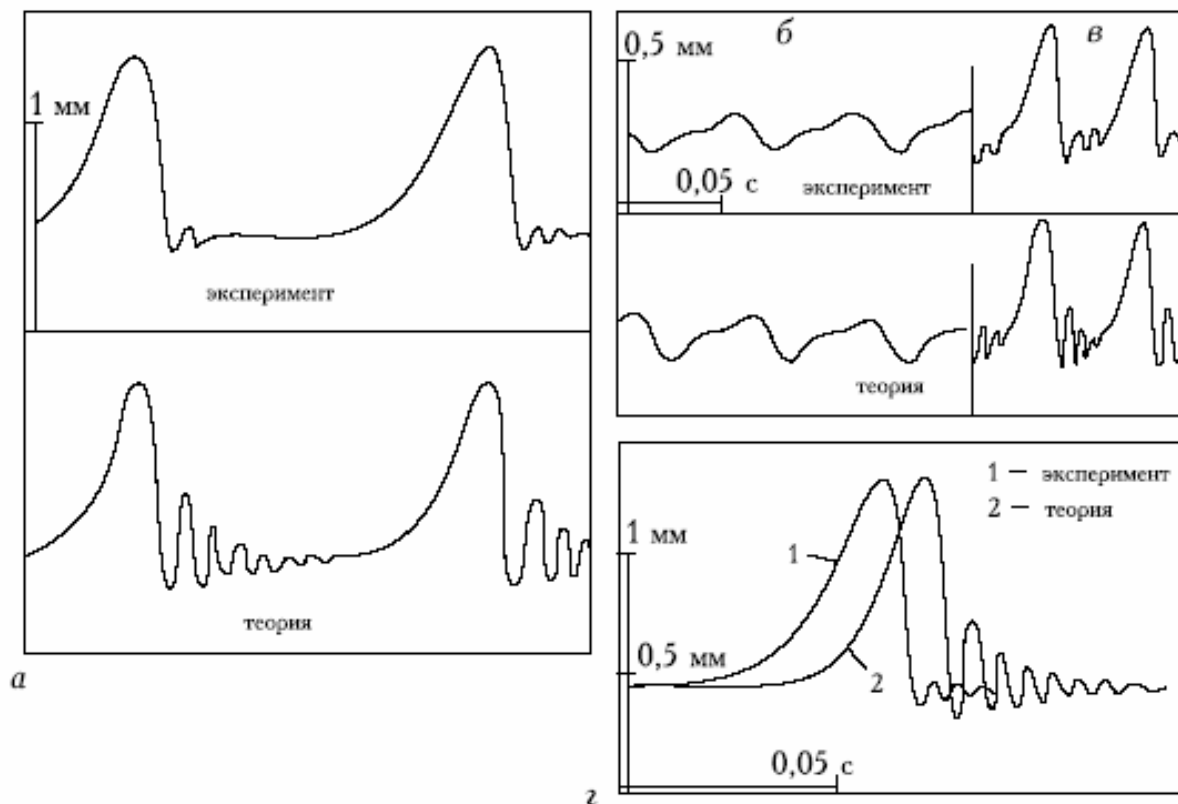
Структура решений



Доминирующие волны имеют наибольшую скорость при данной длине волны и развиваются из малых возмущений

Сравнение с экспериментом

Периодические волны

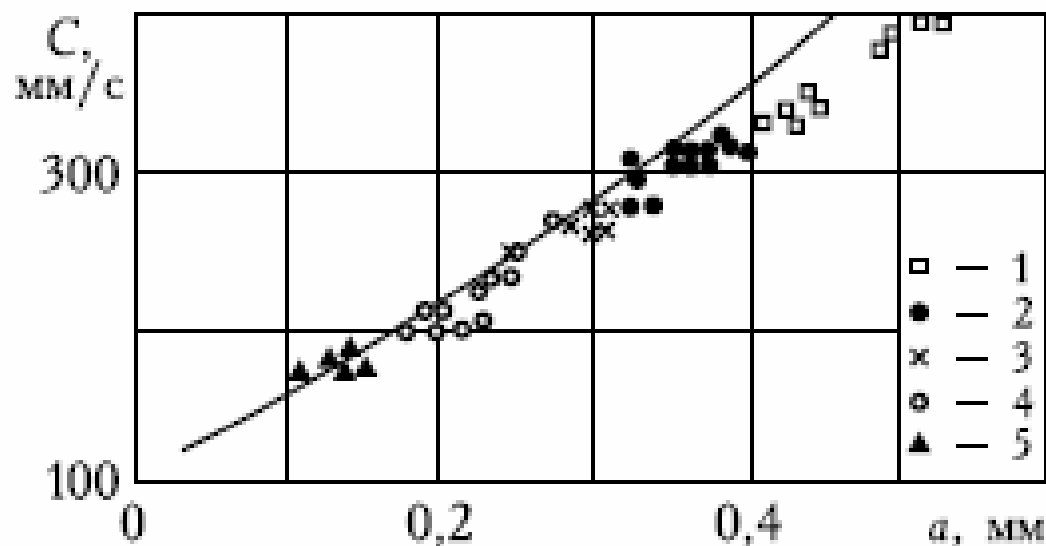


Эксперимент: Алексеенко, Накоряков, Покусаев, 1979

Теория: Демехин, Шкадов, 1985

Сравнение с экспериментом

Уединенные волны



Эксперимент: Алексеенко, Накоряков, Покусаев, 1979

Теория: Демехин, Шкадов, 1985

ФИЗИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕНИЯ

Неньютоновские жидкости

$$\tau_{ij} = 2\varphi(I_2)e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

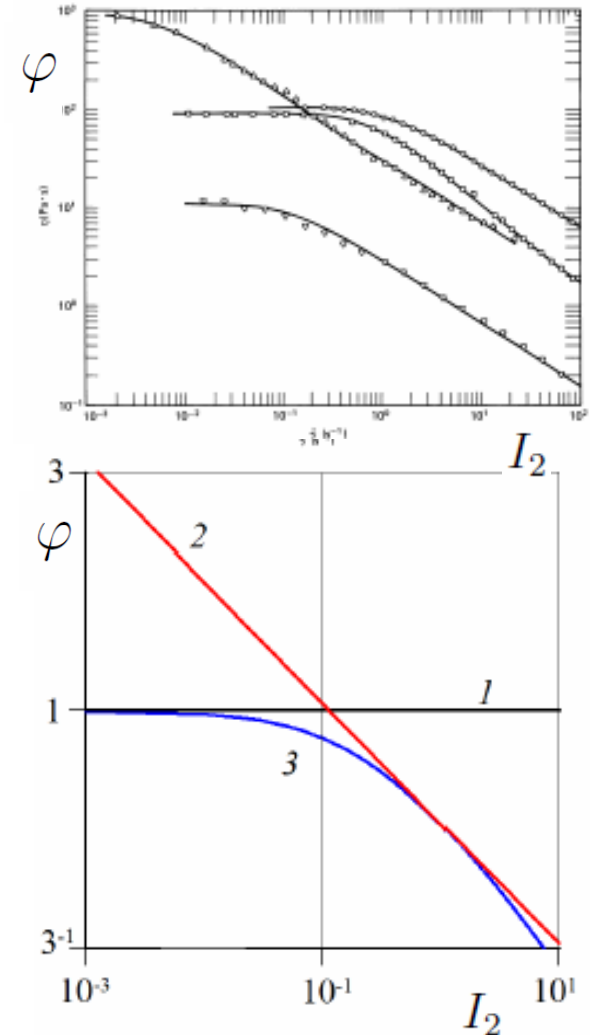
$$I_2 = e_{ij}e_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

- Степенная жидкость

$$\varphi(I_2) = \mu_n (2I_2)^{(n-1)/2}$$

- Модель Эйринга

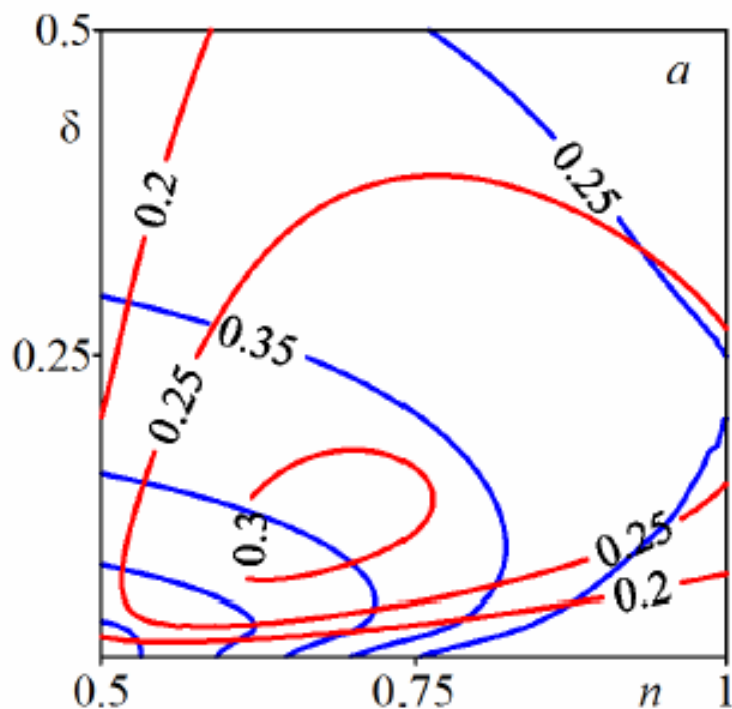
$$\varphi(I_2) = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \frac{\text{sh}^{-1} \sqrt{\lambda I_2}}{\sqrt{\lambda I_2}}$$



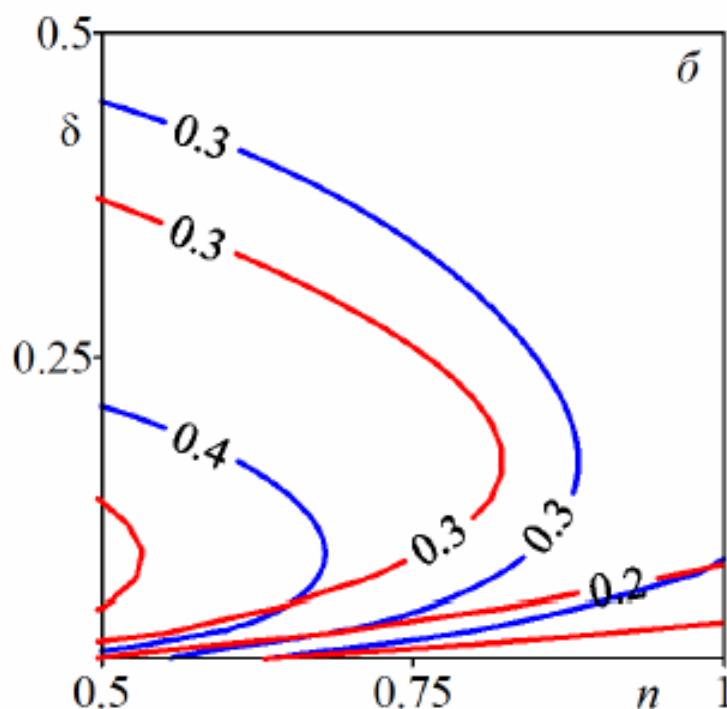
Анализ линейной устойчивости

Нейтральное волновое число

Уравнение Орра-Зоммерфельда



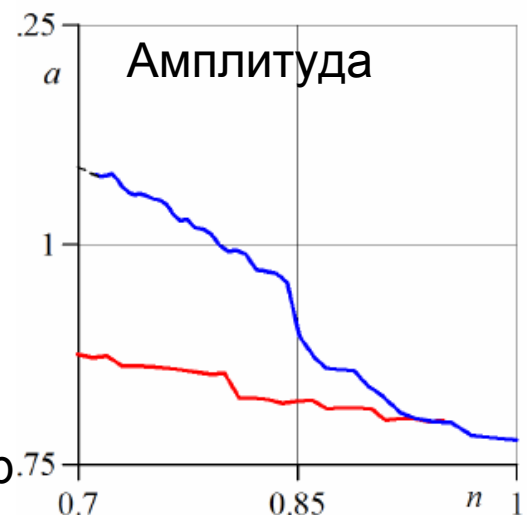
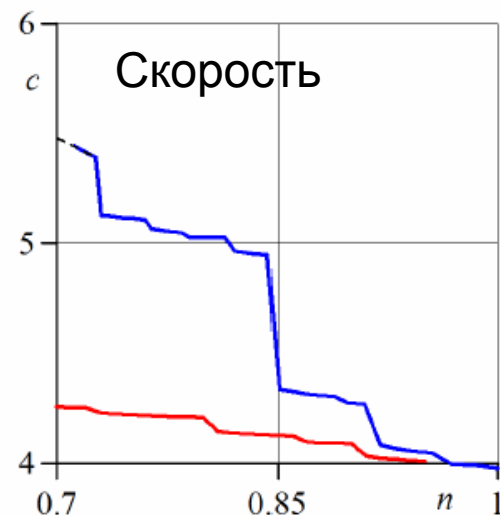
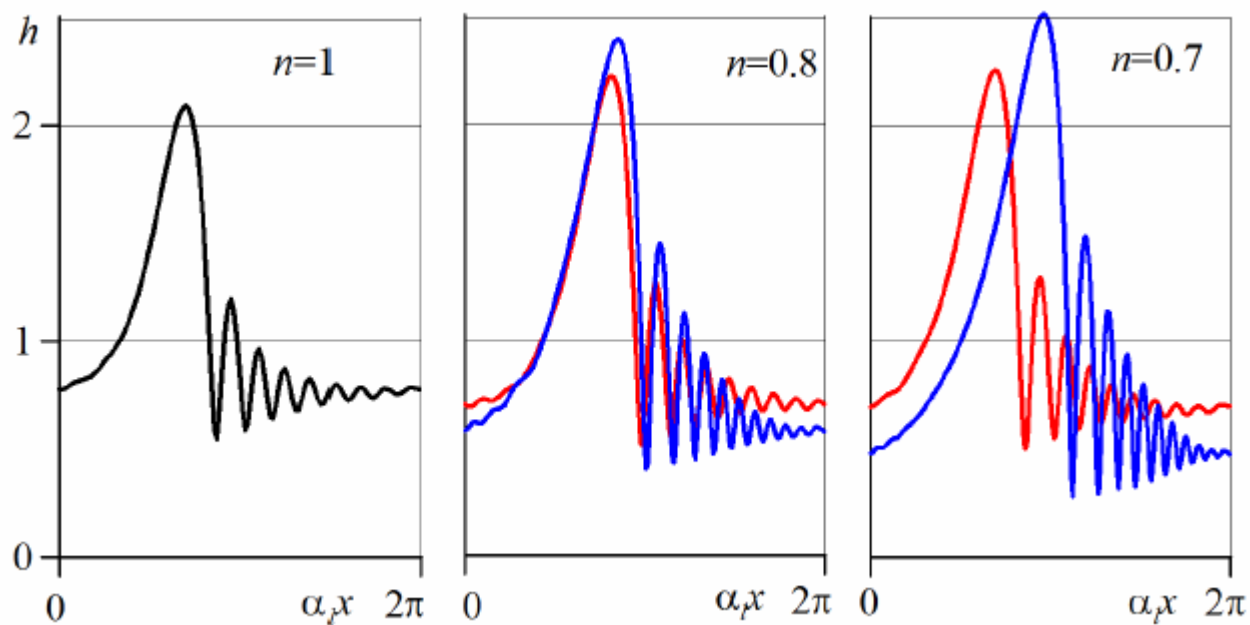
Уравнения для интегральных характеристик



Красные линии – степенная жидкость, синие – модель Эйринга

Нелинейные волны

Профили волн



Красные линии – степенная жидкость, синие – модель Эйр.

Сильновязкие жидкости

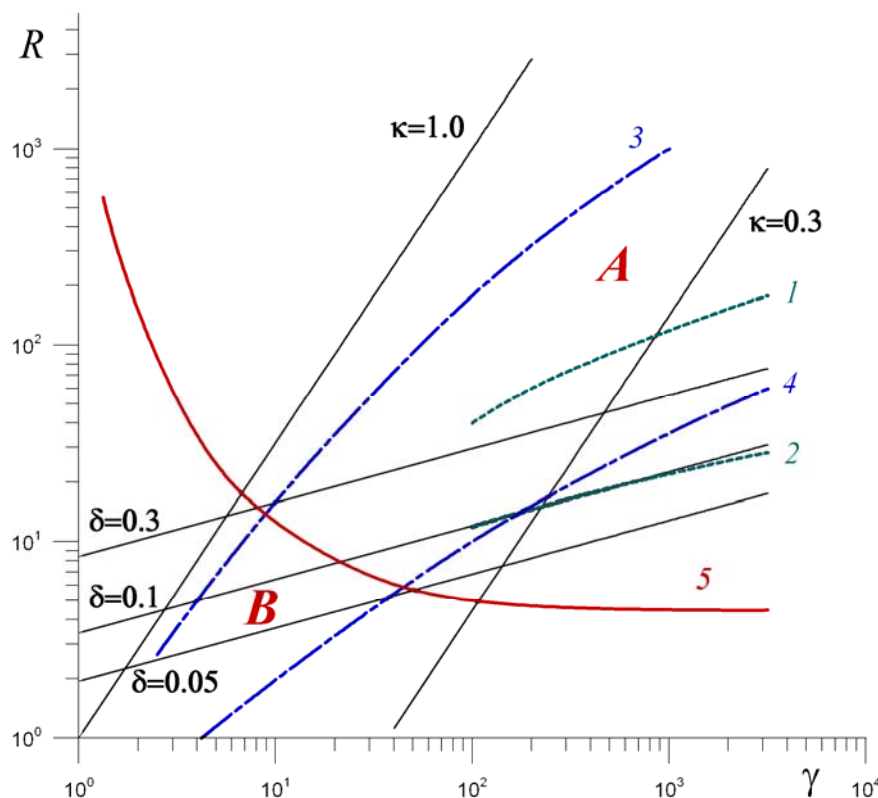
- Двупараметрическая модель

$$\delta = \frac{(3\text{Re})^{11/9}}{45\gamma^{1/3}} \quad \varepsilon = \frac{(3\text{Re})^{2/9}}{\gamma^{1/3}} \quad \gamma = \frac{\sigma}{\rho\nu^{4/3}g^{1/3}}$$

$$h_t + q_x = 0$$

$$5\delta \left[q_t + \frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h} \right)_x \right] = \left(h - \frac{q}{h^2} + hh_{xxx} \right) + \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{5}{3} q_{xx} - \frac{9}{4} \frac{qh_{xx}}{h} - \frac{3}{2} \frac{q_x h_x}{h} + \frac{3}{2} \frac{qh_x^2}{h^2} - 3hh_x h_{xx}^2 - \frac{3}{2} hh_x^2 h_{xxx} \right)$$

Бифуркации нелинейных волн

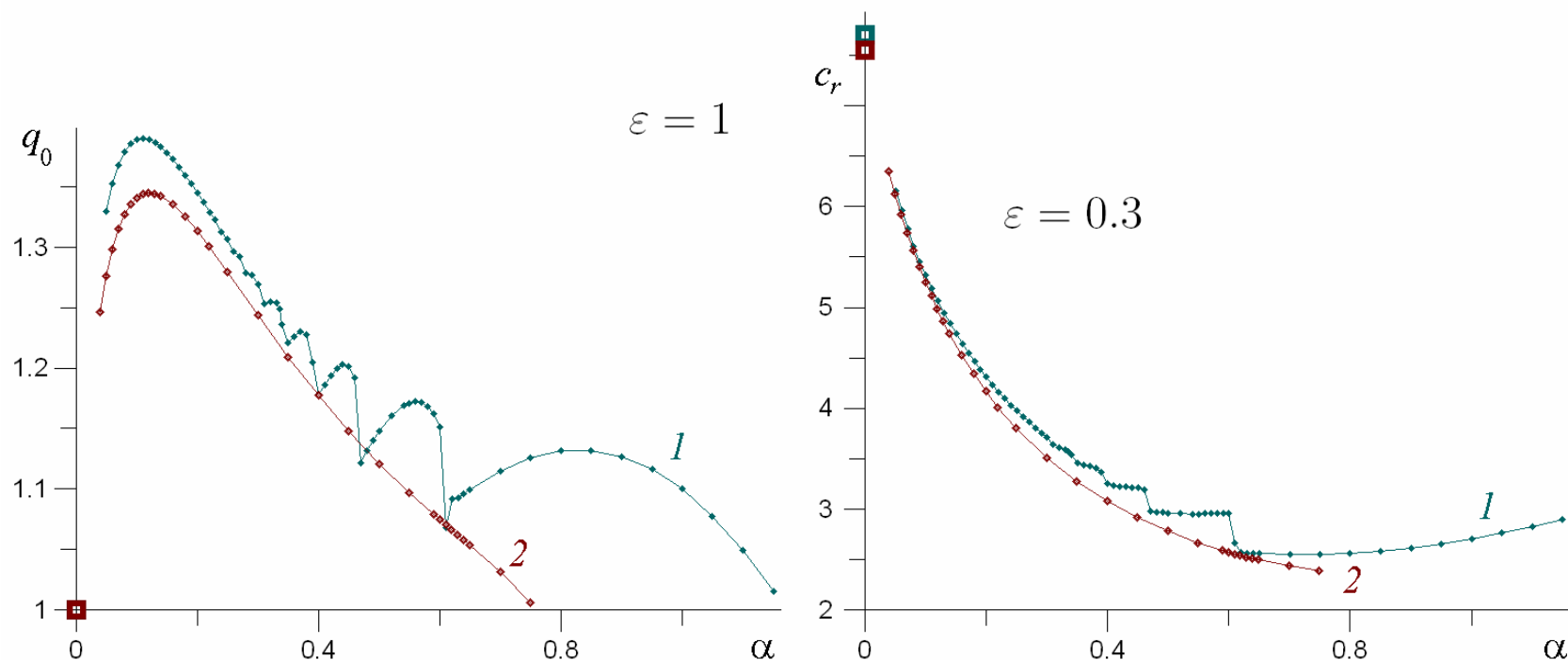


Экспериментальные параметры 1 – 4 ,
5 – бифуркационный перевал.

В области A имеется семейство медленных волн

В области B быстрые волны мягко ответвляются от невозмущенного решения

Бифуркации нелинейных волн

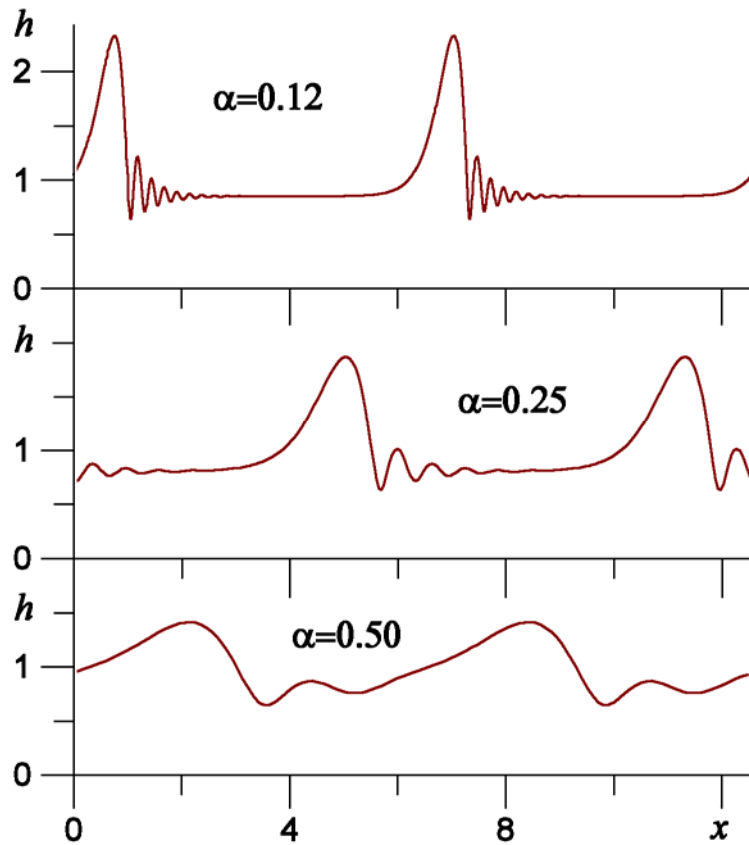


1 – $\gamma=3370$ (ряд бифуркаций медленных волн до перехода на семейство быстрых волн)

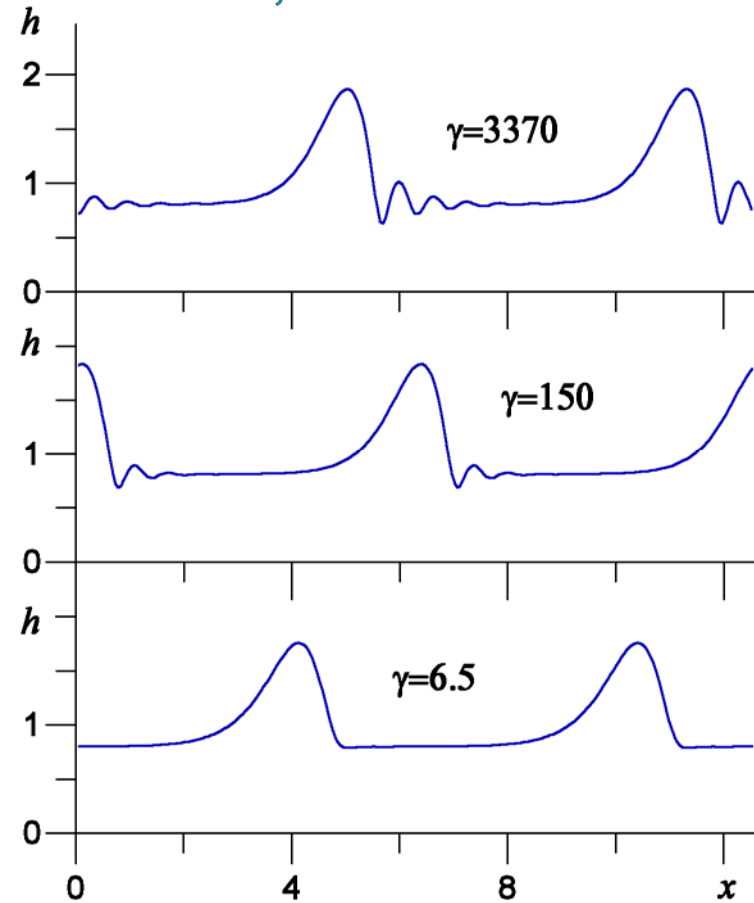
2 – $\gamma=6.5$ (единственная бифуркация семейства быстрых волн)

Подавление капиллярной ряби

$\delta=0.1, \gamma=3370$



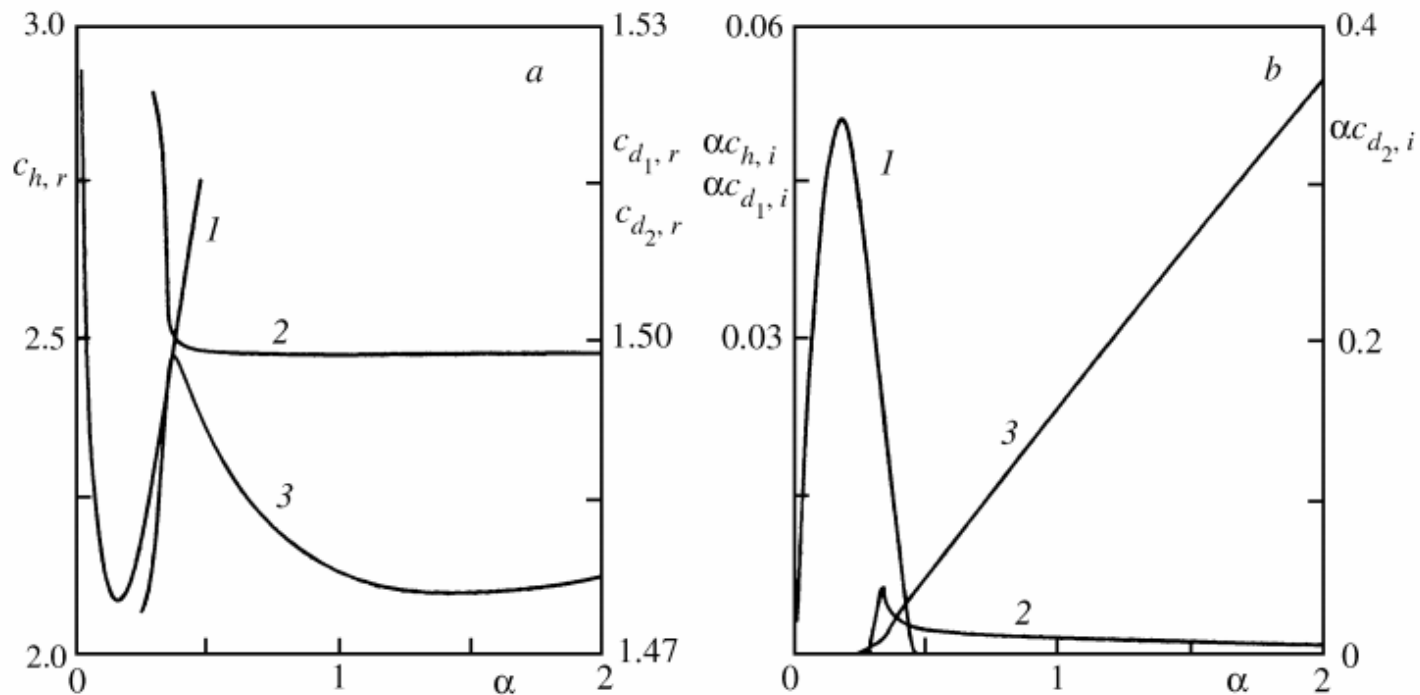
$\delta=0.1, \alpha=0.25$



Растворенное поверхностно-активное вещество

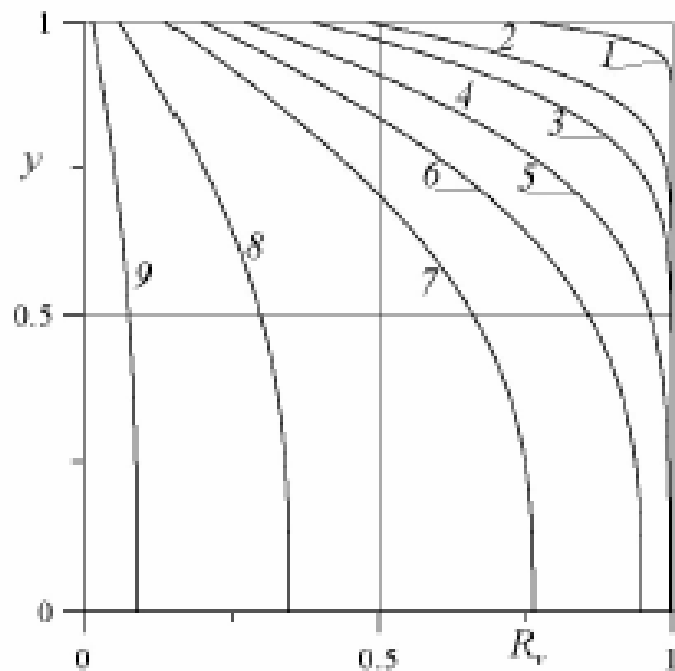
Эффект Марангони – касательные напряжения, вызванные градиентом концентрации ПАВ.

Анализ линейной устойчивости: 1 – гидродинамическая мода, 2,3 – диффузионные. Наблюдается коротковолновая неустойчивость

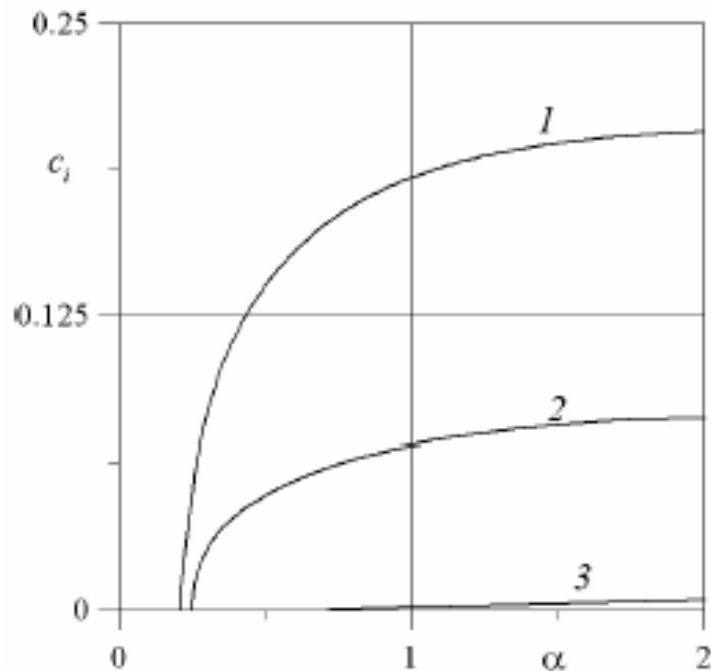


Обеднение раствора при испарении

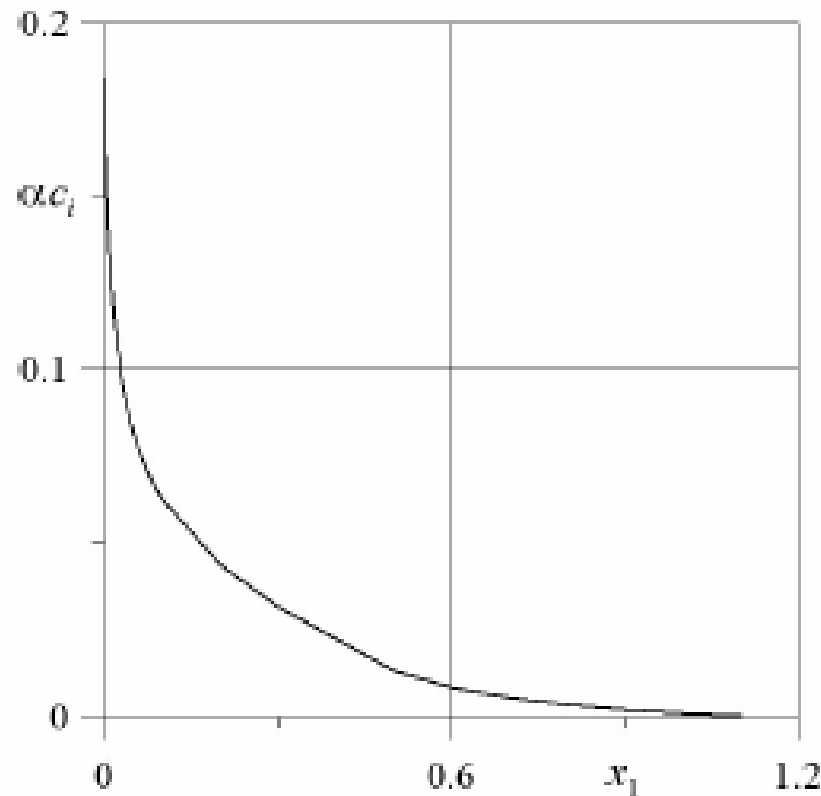
Профиль концентрации



Коэффициент усиления
диффузионной моды



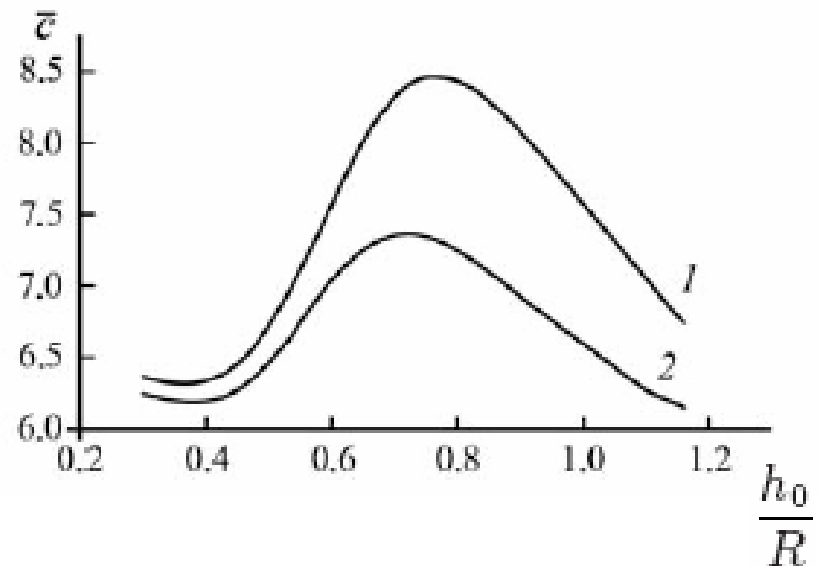
Зависимость максимального коэффициента усиления от продольной координаты



Диффузионная мода неустойчивости прекращает
нарастать

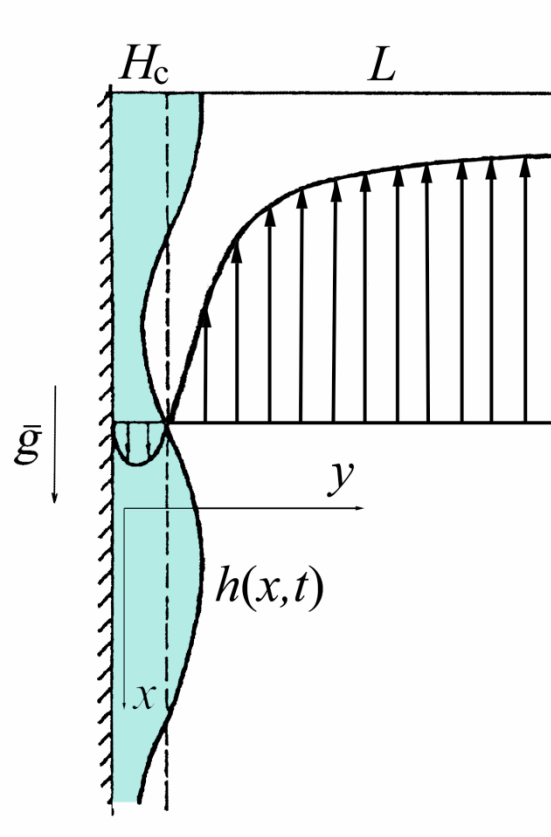
Пленка на тонком цилиндре

- Жидкость стекает по внешней поверхности цилиндра
- Есть капиллярные силы, связанные с «поперечной кривизной»
- Скорость уединенных волн немонотонно зависит от радиуса цилиндра



УПРАВЛЕНИЕ ВОЛНООБРАЗОВАНИЕМ

Граничный воздушный поток



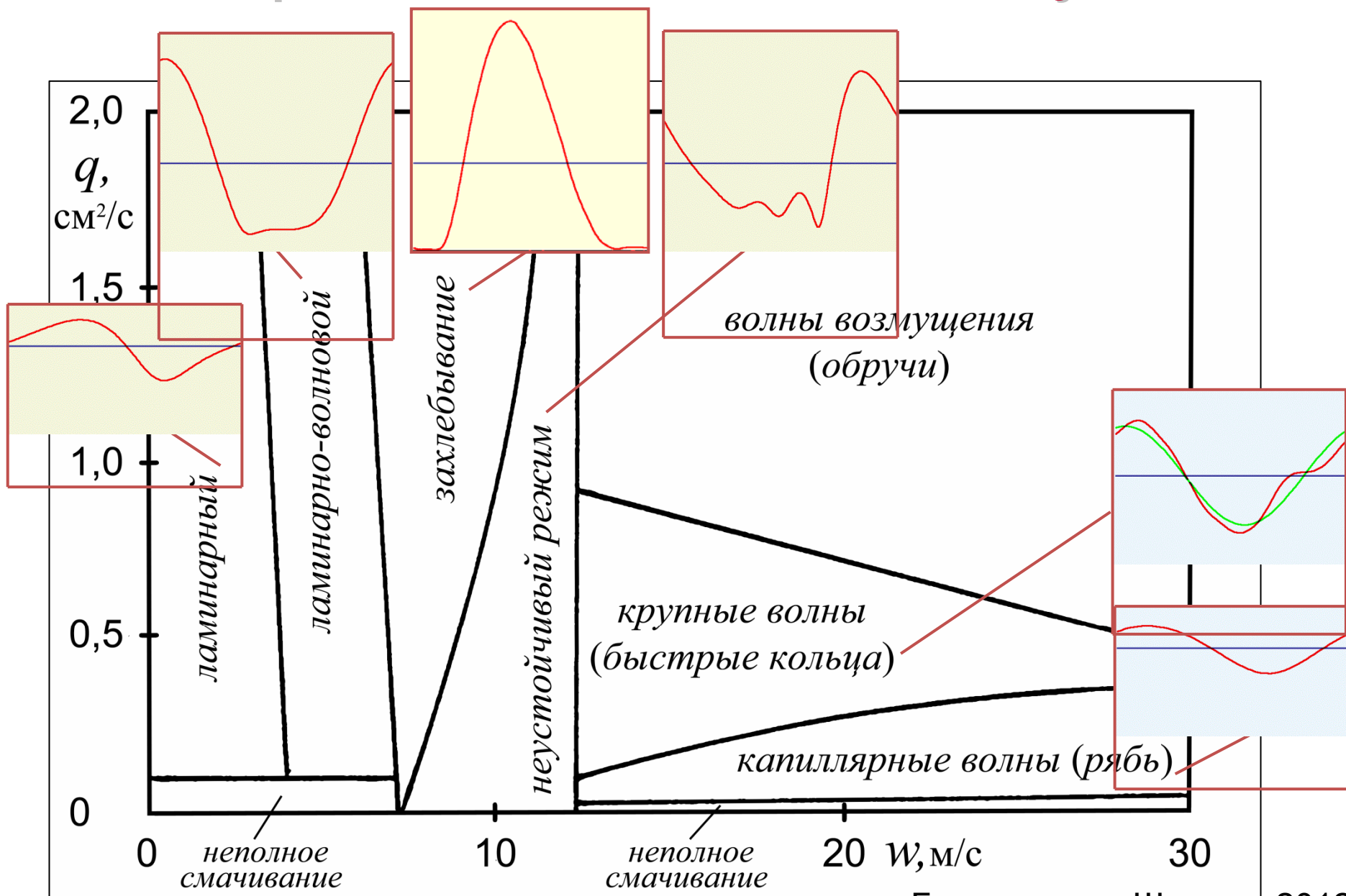
- Для жидкости – уравнения Шкадова
- Для газа – Орра-Зоммерфельда

Дополнительный
параметр: трение на
поверхности



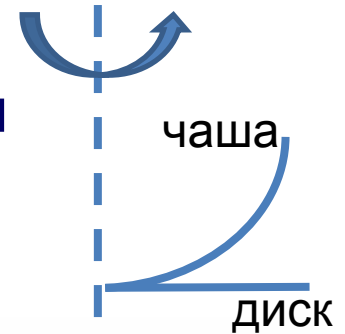
Семенов П.А.
ЖТФ. 1944,
№7-8

Диаграмма режимов плёночного течения воды при восходящем движении воздуха

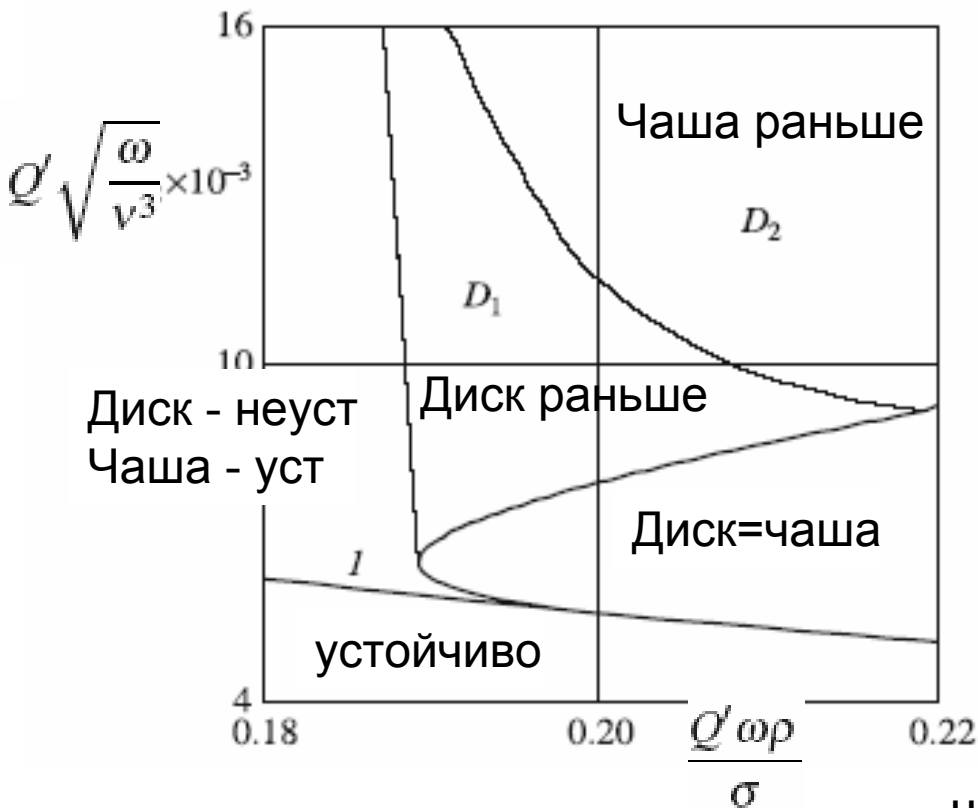


Пленка на вращающейся поверхности

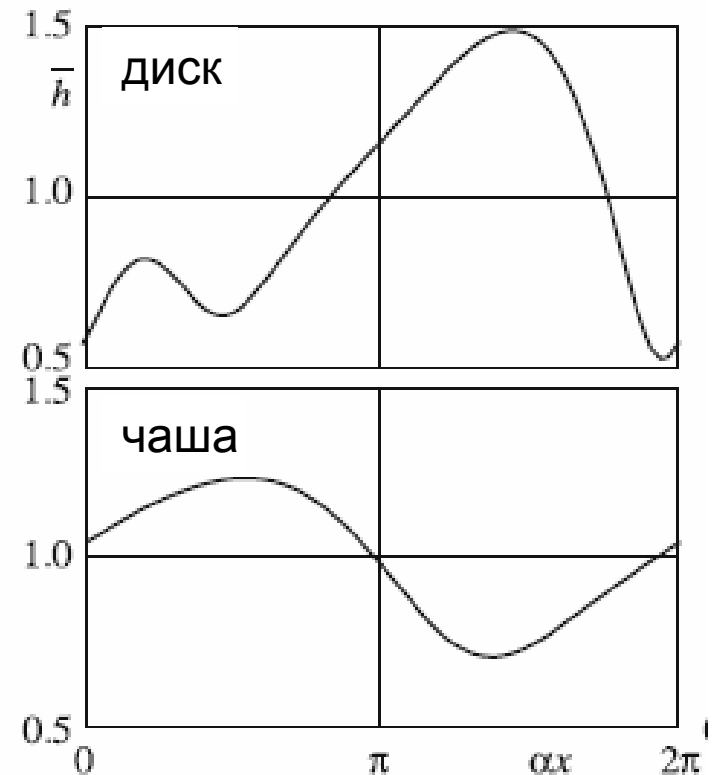
Растекание пленки по вращающейся поверхности может подавить развитие неустойчивости



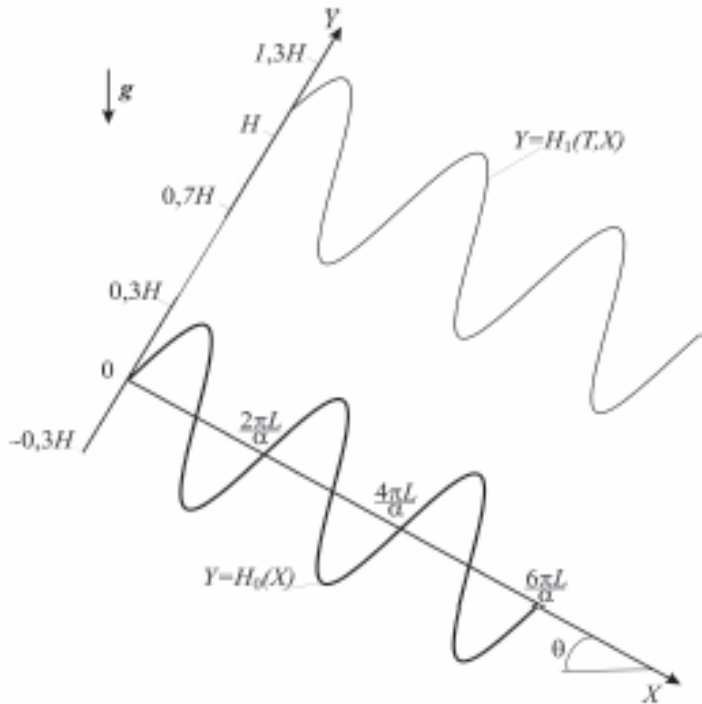
Начало неустойчивости



Нелинейные волны



Периодический рельеф подложки



$$h_t + q_x = 0,$$

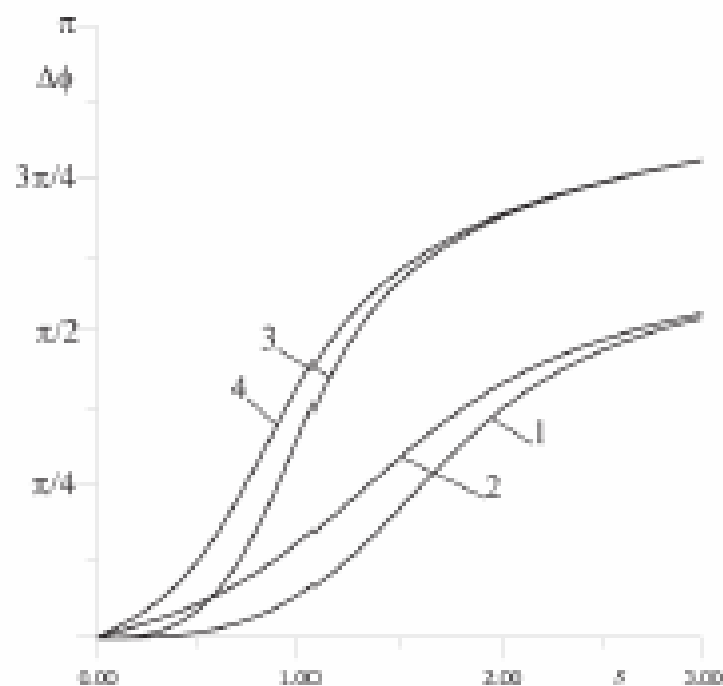
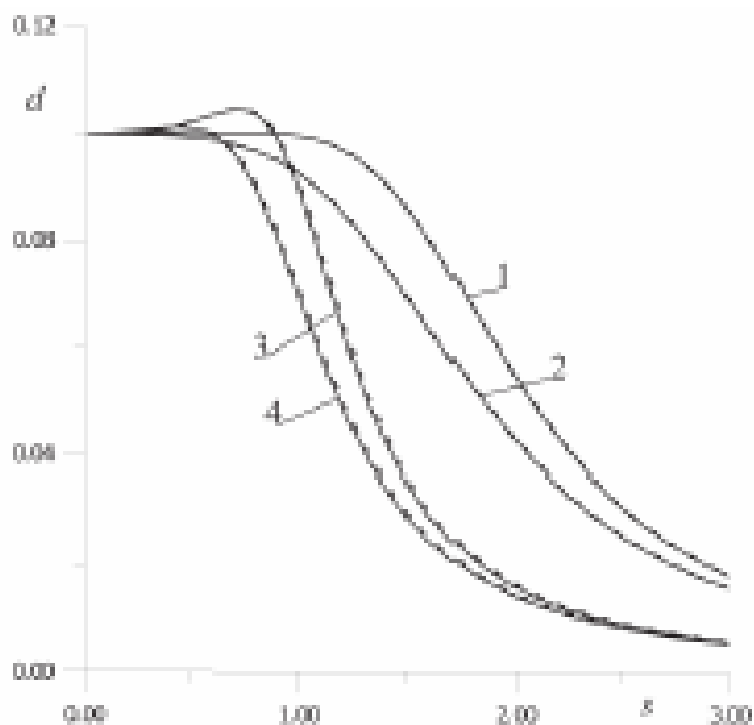
$$q_t + \frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h} \right)_x =$$

$$= \frac{1}{5\delta} \left(hh_{xxx} - Bh h_x - \left(\frac{q}{h^2} \right)_x + h \right) + \frac{h}{5\delta} (h_{0xxx} - Bh_{0x}).$$

$$B = \varepsilon \operatorname{ctg} \theta$$

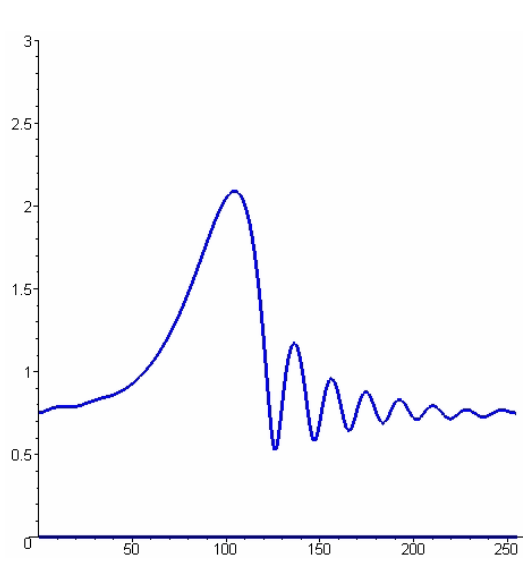
Стационарное решение

Периодические неровности ($s = \alpha/\sqrt{15\delta}$)
1 — $\delta = 0.05, \beta = 0$. 2 — $\delta = 0.05, \beta = 1$. 3 — $\delta = 0.15, \beta = 0$. 4 — $\delta = 0.15, \beta = 1$.



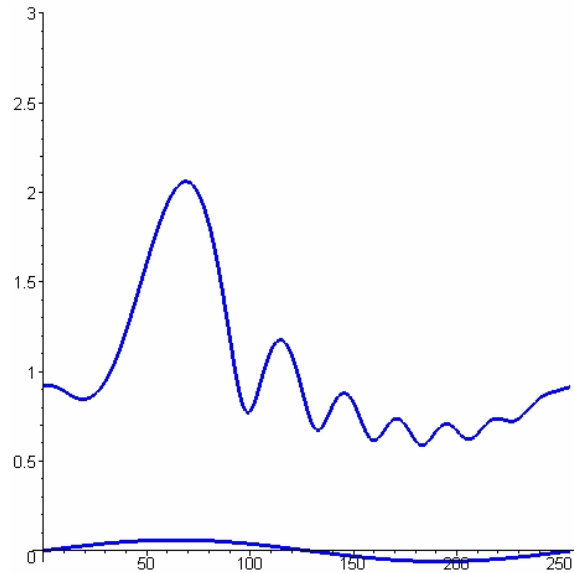
Нелинейные волны

Плоская поверхность



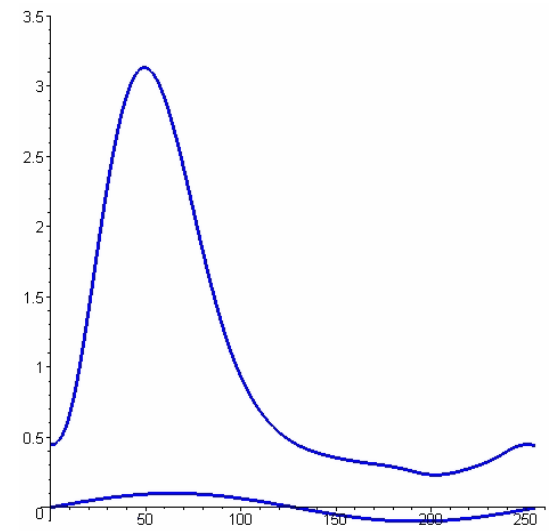
Регулярная волна

Малые неровности (5%)



Профиль волны меняется
со временем периодически

Большие неровности (10%)



Стационарное течение

Электрическое поле

- Пленка проводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле – незначительная дестабилизация

$$h_t + q_x = 0,$$

$$q_t + \frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h} \right)_x =$$

$$= \frac{1}{5\delta} \left(h h_{xxx} - \left(\frac{q}{h^2} \right)_x + h + f_e \alpha h F_x \right)$$

$$h = 1 + \sum_k a_k \exp(ik\alpha x) \quad F = \sum_k k a_k \exp(ik\alpha x)$$

$$f_e = \frac{2(45\delta)^{1/11}}{\gamma^{7/11}} \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{\rho(g\nu)^{1/3}}$$

Заключение

- Изложен метод Капицы – Шкадова описания течений тонких пленок и указаны основные свойства решений
- Метод широко применяется, изданы монографии:
 - **H.C. Chang, E.A. Demekhin Complex Wave Dynamics on Thin Films, 2002**
 - **S. Kaliadasis et al Falling liquid Films, 2012**
- Рассмотрены обобщения классических результатов, изученные авторами в 2005 – 2014 гг.

