

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

**УТВЕРЖДАЮ**
декан механико-
математического факультета
_____/А.И.
Шафаревич /
« 14 » октября 2021г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

Теория функций k -значной логики

Уровень высшего образования:

магистратура

Направление подготовки / специальность:

02.04.01 "Математика и компьютерные науки" (3++)

Направленность (профиль)/специализация ОПОП:

Интеллектуальные системы. Теория и приложения

Форма обучения:

очная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена
на заседании Ученого совета механико-математического факультета
(протокол № 7 от 14 октября 2021 года)

Москва 2021

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 02.04.01 "Математика и компьютерные науки" утвержденного Приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. N 13.

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО:

дисциплина относится к блоку профессиональной подготовки вариативной части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть):

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен обладать следующими компетенциями:

Знать: основные понятия, концепции, результаты и методы дискретной математики, теории вероятностей, математического анализа и линейной алгебры.

Уметь: решать стандартные задачи дискретной математики и теории вероятностей.

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции.	Индикатор (показатель) достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций
ПК-8. Способен руководить проектами со стороны заказчика по созданию, внедрению и использованию одной или нескольких сквозных цифровых субтехнологий искусственного интеллекта в прикладных областях	ПК-8.3. Решает прикладные задачи и реализует проекты в области сквозной цифровой субтехнологии «Рекомендательные системы и системы поддержки принятия решений» со стороны заказчика	ПК-8.3. 3-1. Знает фундаментальные правила построения рекомендательных систем и систем поддержки принятия решений, основанных на интеллектуальных принципах, методы и подходы к планированию и реализации проектов по созданию систем искусственного интеллекта на основе сквозной цифровой субтехнологии «Рекомендательные системы и системы поддержки принятия решений» ПК-8.3. У-1. Умеет решать задачи по выполнению коллективной проектной деятельности для создания, поддержки и использования систем искусственного интеллекта на основе сквозной цифровой субтехнологии «Рекомендательные системы и системы поддержки принятия решений» со стороны заказчика

4. Объем дисциплины (модуля) составляет 3 з.е., в том числе 32 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 76 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий:

5.1. Структура дисциплины (модуля) по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий (в строгом соответствии с учебным планом)

Наименование разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Номинальные трудозатраты обучающегося		Самостоятельная работа обучающегося, академические часы	Всего академических часов	Форма текущего контроля успеваемости* (наименование)
	Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, академические часы				
	Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа			
Тема 1 Функции k-значной логики и оператор замыкания.	4		15	19	опрос
Тема 2 Отношения и предикаты k-значной логики	8		16	24	опрос
Тема 3 Соответствие Галуа между замкнутыми классами функций и предикатов.	8		15	23	опрос
Тема 4 Решетка Поста замкнутых классов	8		15	23	опрос
Тема 5 Сложность задачи удовлетворения ограничениям	4		15	19	опрос
Другие виды самостоятельной работы (отсутствуют)	—	—			—
Промежуточная аттестация (экзамен)					
Итого	32		76	108	—

5.2. Содержание разделов (тем) дисциплины

№ п/п	Наименование разделов (тем) дисциплины	Содержание разделов (тем) дисциплин
1.	Тема 1 Функции k-значной логики и оператор замыкания.	Функции 2-значной логики. Функции k-значной логики. Оператор замыкания. Минимальные клоны. Классификация Розенберга. Минимальные клоны двузначной логики.
2.	Тема 2 Отношения и предикаты k-значной логики	Отношения и предикаты. Описание предполных классов через предикаты. Оператор замыкания на множестве предикатов. Предполные классы трёхзначной логики: классы сохранения множества, классы монотонных функций, центральные классы, класс самодвойственных функций, класс линейных функций. Теорема Яблонского: предполные классы трёхзначной логики.
3.	Тема 3 Соответствие Галуа между замкнутыми классами функций и предикатов.	Задание замкнутых классов функций множеством предикатов. Задание замкнутого множества предикатов множеством функций. Доказательство соответствия Галуа. Критерий конечной порождённости замкнутого класса. Критерий предикатной описуемости замкнутого класса.
4.	Тема 4 Решетка Поста замкнутых классов	Существенные предикаты. Свойства существенных предикатов. Замкнутые классы двузначной логики, содержащие функцию голосования. Замкнутые классы двузначной логики, содержащие функцию минорирования. Замкнутые классы двузначной логики, содержащие дизъюнкцию. Решетка Поста всех замкнутых классов двузначной логики.
5.	Тема 5 Сложность задачи удовлетворения ограничениям	Задача удовлетворения ограничениям. Примеры языков ограничений с полиномиальной сложностью задачи удовлетворения ограничениям. Описание языков ограничений, для которых задача решается локально. Сложность для произвольного языка ограничений и доказательство в одну сторону.

6. Фонд оценочных средств (ФОС, оценочные и методические материалы) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю).

6.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости, критерии и шкалы оценивания (в отсутствие утвержденных соответствующих локальных нормативных актов на факультете)

Примеры заданий для практических занятий

Проверить, сохраняет ли функция f предикат p для конкретной функции и конкретного предиката.

Даны следующие отношения/предикаты.

$R1 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1),(0,2),(1,0)\}$, $R2 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1),(0,2),(1,2)\}$, $R3 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1),(1,0)\}$,

$R4 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(2,0),(0,2),(0,1),(1,0)\}$, $R5 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(2,0),(0,1),(2,1)\}$, $R6 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,2),(2,0)\}$,

$R7 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2)\}$, $R8 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,2),(2,1),(0,1)\}$, $R9 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

$R10 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2),(0,1)\}$, $R11 = \{(2,2),(0,1),(1,2),(2,0)\}$, $R12 = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$

- 1) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $j0(x)$?
- 2) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $j1(x)$?
- 3) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $j2(x)$?
- 4) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $J0(x)$?
- 5) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $J1(x)$?
- 6) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $J2(x)$?
- 7) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $x+1$?
- 8) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $\max(x,y)$?
- 9) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $\min(x,y)$?
- 10) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $x+y$?
- 11) Какие из предикатов $R1, R2, \dots, R12$ сохраняются функцией трехзначной логики $x*y$?
- 12) Сколько всего функций трехзначной логики от одной переменной сохраняет предикат $R1$?
- 13) Сколько всего функций трехзначной логики от одной переменной сохраняет предикат $R3$?
- 14) Сколько всего функций трехзначной логики от одной переменной сохраняет предикат $R7$?
- 15) Сколько всего функций трехзначной логики от одной переменной сохраняет предикат $R8$?
- 16) Сколько всего функций трехзначной логики от одной переменной сохраняет предикат $R10$?
- 17) Сколько всего функций трехзначной логики от одной переменной сохраняет предикат $R11$?
- 18) Сколько всего функций трехзначной логики от одной переменной сохраняет предикат $R12$?

Проверить систему функций на полноту в трехзначной логике.

- 1) Полна ли в P3 система функций $j_0, j_1, j_3, \max, \min$?
- 2) Полна ли в P3 система функций $J_0, J_1, J_3, x+y, x*y$?
- 3) Полна ли в P3 система функций $0, 1, 2, \max(j_0(x), J_1(y)), x+y$?
- 4) Полна ли в P3 система функций $\max(j_0(x), j_1(y)), \max(j_1(x), j_2(y)), \max(j_2(x), j_0(y)), \min(x, y), 0, 1, 2$?
- 5) Полна ли в P3 система функций $j_0(x)j_1(y)j_2(z), 2x+2y$?
- 6) Полна ли в P3 система функций $xu, x+1$?
- 7) Выделить всевозможные базисы из полной в P3 системы $0, 1, 2, j_0, j_1, j_2, x+y, x*y$.
- 8) Выделить всевозможные базисы из полной в P3 системы $0, 1, 2, J_0, J_1, J_2, \max, \min$.
- 9) Выделить всевозможные базисы из полной в P3 системы $\max(j_0(x), y), \min(j_0(x), y), 0, 1, 2, x+y$.

Используя соответствие Галуа проверить, можно ли вывести предикат.

Даны следующие предикаты трехзначной логики

$R_1 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (0,2), (1,0), (2,0)\}$, $R_2 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (0,2), (1,2)\}$, $R_3 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0)\}$,
 $R_4 = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$, $R_5 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}$, $R_6 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,2), (2,1), (0,1)\}$,

- 1) Верно ли, что предикат R_6 принадлежит замыканию $[\{R_2, R_4\}]$?
- 2) Верно ли, что предикат R_5 принадлежит замыканию $[\{R_3, R_4\}]$?
- 3) Верно ли, что предикат R_1 принадлежит замыканию $[\{R_3, R_5\}]$?
- 4) Верно ли, что предикат R_2 принадлежит замыканию $[\{R_6, R_4\}]$?
- 5) Верно ли, что предикат R_3 принадлежит замыканию $[\{R_1, R_4\}]$?

Используя решетку Поста проверить выразимость на множестве булевых функций.

- 1) Проверить, что функция $x \text{ or } y$ выводится из функций $x+y+z$ и $x (y \text{ or not } z)$.
- 2) Проверить, что функция $x+y+z$ выводится из функций $x \text{ or } (y \text{ not } z)$ и $x (y \text{ or not } z)$.
- 3) Проверить, что функция $xu \text{ or } yz \text{ or } xz$ выводится из функций $x+y+z+1$ и $x \text{ or } yz$.

Используя решетку Поста найти базис наибольшего размера.

- 1) Найти базис наибольшего размера для класса самодвойственных функций двузначной логики.
- 2) Найти базис наибольшего размера для класса монотонных функций сохраняющих ноль.
- 3) Найти базис наибольшего размера для класса линейных функций сохраняющих 1.

Задачи повышенной сложности.

- 1) Не используя решетку Поста, описать все замкнутые классы линейных функций двузначной логики.
- 2) Придумать 40 000 000 минимальных клонов в логике значности 11.

- 3) Доказать, что следующая функция порождает минимальный клон в трехзначной логике. $S(x,y,z) = x$, если $|\{x,y,z\}|=2$, и
- 4) Доказать, что следующая функция порождает минимальный клон в K -значной логике. $S(x_1, \dots, x_k) = x_1$, если $|\{x_1, x_2, \dots, x_k\}| < k$, и $S(x_1, \dots, x_k) = x_2$ иначе.
- 5) Доказать, что следующая функция порождает минимальный клон в K -значной логике. $M(x,y,z) = x$, если $x=y$, $M(x,y,z) = y$, если $y=z$, $M(x,y,z) = x$, если $x=z$, и $M(x,y,z) = 0$ иначе,
- 6) Доказать, что для предполный класс Слупецкого нельзя задать предикатов ариности меньше k .
- 7) Придумать базис для функций 5-значной логики размером $N = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots$
- 8) Найти базис наибольшего размера для класса монотонных функций, сохраняющих ноль.
- 9) Оцените сверху количество минимальных клонов k -значной логики при $k=5$.
- 10) Сколько всего минимальных клонов k -значной логики, порожденных функцией от одной переменной при $k=4$?
- 11) Сколько всего минимальных клонов k -значной логики, порожденных функцией минорирования при $k=4$, $k=5$, $k=8$?
- 12) Оцените сверху количество предполных классов k -значной логики.

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине, критерии и шкалы оценивания

Программа экзамена:

1. Функции 2-значной логики. Функции k -значной логики. Оператор замыкания.
2. Минимальные клоны. Классификация Розенберга. Минимальные клоны двузначной логики.
3. Отношения и предикаты. Описание предполных классов через предикаты.
4. Оператор замыкания на множестве предикатов.
5. Предполные классы трёхзначной логики: классы сохранения множества, классы монотонных функций.
6. Предполные классы трёхзначной логики: центральные классы, класс самодвойственных функций.
7. Предполные классы трёхзначной логики: класс линейных функций.
8. Теорема Яблонского: предполные классы трёхзначной логики.
9. Соответствие Галуа между замкнутыми классами функций и замкнутыми классами предикатов.
10. Критерий конечной порождённости замкнутого класса.
11. Критерий предикатной описуемости замкнутого класса.
12. Существенные предикаты. Свойства существенных предикатов.

13. Замкнутые классы двузначной логики, содержащие функцию голосования.
14. Замкнутые классы двузначной логики, содержащие функцию минорирования.
15. Замкнутые классы двузначной логики, содержащие дизъюнкцию.
16. Решетка Поста всех замкнутых классов двузначной логики.
17. Задача удовлетворения ограничениям (Constraint Satisfaction Problem, CSP): сложность и примеры.
18. Связь функций k-значной логики и сложностью задачи CSP
19. Языки ограничений, для которых CSP решается локально.
20. Классификация сложности для произвольного языка ограничений.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка	2 (не зачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)
виды оценочных средств				
Знания (виды оценочных средств: опрос, тесты)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: практические задания)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.н.)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

7. Ресурсное обеспечение:

7.1. Перечень основной и дополнительной литературы

Перечень основной и дополнительной учебной литературы:

- [1] Жук Д. Н. Предикатный метод построения решетки Поста. Дискрет. матем., 23:2 (2011), 115-128.
- [2] ZHUK, DMITRIY. "Strong Subalgebras and the Constraint Satisfaction Problem." Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing 36 (2021).
- [3] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. Наука, Москва, 1986.
- [4] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. Наука, Москва, 1966.
- [5] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Набебин А. А. Предполные классы в многозначных логиках. Наука, Москва.
- [6] D. Lau. Function algebras on finite sets. Springer. 2006.
- [7] Вондарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А. Теория Галуа для алгебр Поста I-II. Кибернетика 3, 1-10 (1969), 5, 1-9 (1969).

7.2. Перечень лицензионного программного обеспечения, в том числе отечественного производства
нет

7.3. Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем
нет

7.4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- 1. <http://intsys.msu.ru/>
- 2. <http://intsys.msu.ru/science/books/>

7.5. Описание материально-технического обеспечения.

Аудитории для проведения лекционных занятий.

8. Соответствие результатов обучения по данному элементу ОПОП результатам освоения ОПОП указано в Общей характеристике ОПОП.

9. Разработчик (разработчики) программы.

к.ф.-м.н., Д.Н.Жук.