

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет



УТВЕРЖДАЮ
декан механико-
математического факультета
/А.И. Шафаревич /
«14» октября 2021г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

Дополнительные (избранные) главы математического анализа

Уровень высшего образования:
магистратура

Направление подготовки / специальность:
02.04.01 "Математика и компьютерные науки" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:
Интеллектуальные системы. Теория и приложения

Форма обучения:
очная

Рабочая программа рассмотрена и утверждена
на заседании Ученого совета Механико-математического факультета
(протокол №7, от 14 октября 2021 года)

Москва 2021

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 02.04.01 "Математика и компьютерные науки" утвержденного Приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. N 13.

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО:

Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» включена в базовую часть профессионального цикла, является базовой дисциплиной в освоении математических знаний и научно-исследовательской работе. Освоение дополнительных глав математического анализа необходимо для изучения всех дисциплин высшей математики и механики, а также предусматривает самостоятельный научный интерес.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть):

Изучение дисциплины предполагает владение материалом дисциплины Математический анализ на уровне бакалавриата.

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю):

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции	Индикатор (показатель) достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций
ОПК-1. Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1. Находит актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1. З-1. Знает математические, естественно- научные и технические методы для решения основных, нестандартных задач создания и применения искусственного интеллекта ОПК-1.1. У-1. Умеет адаптировать существующие математические, естественно-научные и социально- экономические методы для решения основных, нестандартных задач создания и применения искусственного интеллекта
	ОПК-1.2. Формулирует актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.2. З-1. Знает методы решения нестандартных профессиональных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте, с применением математических, естественно- научных, социально-экономических, общеинженерных знаний и знаний в области когнитивных наук ОПК-1.2. У-1. Умеет решать основные, нестандартные задачи создания и применения искусственного интеллекта

	ОПК-1.3. Решает актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.3. З-1. Знает особенности проведения теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте ОПК-1.3. У-1. Умеет проводить теоретическое и экспериментальное исследование объектов профессиональной деятельности, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
ОПК-3. Способен самостоятельно создавать прикладные программные средства на основе современных информационных технологий и сетевых ресурсов, в том числе отечественного производства	ОПК-3.1. Применяет современные информационно-коммуникационные и интеллектуальные компьютерные технологии, инструментальные среды, программно-технические платформы для решения задач в области создания и применения искусственного интеллекта	ОПК-3.1. З-1. Знает современные информационно-коммуникационные и интеллектуальные компьютерные технологии, инструментальные среды, программно-технические платформы для решения профессиональных задач ОПК-3.1. У-1. Умеет применять современные информационно-коммуникационные и интеллектуальные компьютерные технологии, инструментальные среды, программно-технические платформы для решения профессиональных задач
	ОПК-3.2. Обосновывает выбор современных информационно-коммуникационных и интеллектуальных компьютерных технологий	ОПК-3.2. З-1. Знает состав современных информационно-коммуникационных и интеллектуальных компьютерных технологий ОПК-3.2. У-1. Умеет осуществлять выбор современных информационно-коммуникационных и интеллектуальных компьютерных технологий, осуществлять поиск решений на основе научной методологии
	ОПК-3.3. Разрабатывает оригинальные программные средства, в том числе с использованием современных информационно-коммуникационных и интеллектуальных компьютерных технологий, для решения задач в	ОПК-3.3. З-1. Знает принципы разработки оригинальных программных средств, в том числе с использованием современных информационно-коммуникационных и интеллектуальных компьютерных технологий, для решения

	области создания и применения искусственного интеллекта	профессиональных задач ОПК-3.3. У-1. Умеет разрабатывать оригинальные программные средства, в том числе с использованием современных информационно-коммуникационных и интеллектуальных компьютерных технологий, для решения задач в области создания и применения искусственного интеллекта
--	---	--

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 4 зачетных единицы, всего 288 часов, из которых 160 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (аудиторная работа, лекции – 64 часа; аудиторная работа, семинары, решение задач – 56 часов, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости, 32 часа промежуточной аттестации), 128 часов составляет самостоятельная работа студента.

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий:

5.1. Структура дисциплины (модуля) по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий (в строгом соответствии с учебным планом)

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них						Самостоятельная работа обучающегося, часы из них		
		Занятия лекционно-го типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов..	Всего

						успеваемости, промежуточной аттестации				
Тема 1	8	2	2				4	4		4
Тема 2	8	2	2				4	4		4
Тема 3	8	2	2				4	4		4
Тема 4	8	2	2				4	4		4
Тема 5	8	2	2				4	4		4
Тема 6	8	2	2				4	4		4
Тема 7	8	2	2				4	4		4
Тема 8	4	2					2	2		2
Текущий контроль успеваемости	2					2	2			0
Тема 9	8	2	2				4	4		4
Тема 10	8	2	2				4	4		4
Тема 11	8	2	2				4	4		4
Тема 12	8	2	2				4	4		4
Тема 13	8	2	2				4	4		4
Тема 14	4	2					2	2		2

Текущий контроль успеваемости	2					2	2			0
Тема 15	8	2	2				4	4		4
Тема 16	8	2	2				4	4		4
Промежуточная аттестация										
<u>Экзамен (зачет)</u>	16					12	12	4		4
<u>Экзамен (зачет)</u>	8					4	4	4		4
Тема 17	8	2	2				4	4		4
Тема 18	8	2	2				4	4		4
Тема 19	8	2	2				4	4		4
Тема 20	8	2	2				4	4		4
Тема 21	8	2	2				4	4		4
Тема 22	8	2	2				4	4		4
Тема 23	8	2	2				4	4		4
Тема 24	4	2					2	2		2
Текущий контроль успеваемости	2					2	2			0
Тема 25	8	2	2				4	4		4
Тема 26	8	2	2				4	4		4

Тема 27	8	2	2				4	4		4
Тема 28	8	2	2				4	4		4
Тема 29	8	2	2				4	4		4
Тема 30	4	2					2	2		2
Текущий контроль успеваемости	2					2	2			0
Тема 31	8	2	2				4	4		4
Тема 32	8	2	2				4	4		4
Промежуточная аттестация										
<u>Экзамен (зачет)</u>	12					12	12			0
<u>Экзамен (зачет)</u>	4					4	4			0
Итого	288	64	56	0	0	40	160	128	0	128

5.2. Содержание разделов (тем) дисциплины

Тема 1	Предел последовательности.
Тема 2	Предел функции в точке.
Тема 3	Непрерывность функции на отрезке.

Тема 4	Дифференцируемость функции одного переменного.
Тема 5	Производная, касательная, дифференциал их связи.
Тема 6	Построение графиков функций.
Тема 7	Интеграл Римана.
Тема 8	Специальный критерий интегрируемости функции по Риману.
Тема 9	Свойства интеграла Римана как функции верхнего (нижнего) предела интегрирования.
Тема 10	Теоремы о среднем для интеграла Римана. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.
Тема 11	Несобственные интегралы, признаки сходимости их. Абсолютная и условная сходимость.
Тема 12	Кривые в многомерном пространстве. Теорема о длине дуги кривой.
Тема 13	Приложения определённого интеграла.
Тема 14	Связь между интегрируемости функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.
Тема 15	Метрические и нормированные пространства.
Тема 16	Предел функции и его свойства в метрических и нормированных пространствах. Непрерывные функции и их свойства в метрических и нормированных пространствах.
Тема 17	Непрерывные и дифференцируемые функции от многих переменных. Частные производные и необходимое условие дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.
Тема 18	Теорема о дифференцируемости сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила дифференцирования. Производная по направлению. Градиент. Геометрический смысл дифференциала.
Тема 19	Частные производные высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка.
Тема 20	Дифференциалы высших порядков функции многих переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Формулы Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа.

Тема 21	Приложение формулы Тейлора. Локальный экстремум <i>функции многих переменных</i> . Достаточное условие экстремума.
Тема 22	Неявные функции. Теорема о неявной функции.
Тема 23	Числовые ряды.
Тема 24	Бесконечные произведения.
Тема 25	Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость.
Тема 26	Степенные ряды на комплексной плоскости.
Тема 27	Функции, зависящие от параметра.
Тема 28	Собственные интегралы с параметром.
Тема 29	Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы.
Тема 30	Тригонометрические ряды Фурье и их свойства.
Тема 31	Кратный интеграл Римана. Несобственный кратный интеграл.
Тема 32	Криволинейные интегралы I и II рода. Векторные поля.

Тема 1.

Заголовок. Предел последовательности.

Содержание. Предел последовательности. Теорема Вейерштрасса о монотонной последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании частичного предела ограниченной числовой последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности. Теорема Штольца. Существование решения уравнения Кеплера.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 2.

Заголовок. Предел функции в точке.

Содержание. Предел функции в точке. Критерий Коши существования предела функции по базе множеств. Теоремы о пределе сложной функции по базам множеств. Непрерывность функции в точке. Замечательные пределы. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема о непрерывности обратной функции. Непрерывность решения уравнения Кеплера.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 3.

Заголовок. Непрерывность функции на отрезке.

Содержание. Теоремы Коши о промежуточных значениях функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности и о достижении экстремальных значений функциями, непрерывными на отрезке. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 4.

Заголовок. Дифференцируемость функции одного переменного.

Содержание. Понятие дифференциала и производной функции от одной переменной, их геометрический смысл. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема Лейбница о высших производных от произведения функций. Формула Фаа ди Бруно.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 5.

Заголовок. Производная, касательная, дифференциал их связи.

Содержание. Теорема Дарбу о возрастании функции в точке. Теорема Ролля о нуле производной. Теоремы Коши и Лагранжа о конечных приращениях. Принцип Ферма локального экстремума функции в точке. Теорема Дарбу о промежуточном значении производной на интервале. Теорема о точках разрыва производной функции на интервале.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 6.

Заголовок. Построение графиков функций.

Содержание. Построение графиков функций с полным исследованием.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 7.

Заголовок. Интеграл Римана.

Содержание. Критерий Римана интегрируемости функции на отрезке и три его эквивалентные формы. Вычисление неопределенных и определенных интегралов.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 8.

Заголовок. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману.

Содержание. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману. Интеграл Римана как предел по базе. Классы интегрируемых функций. Вычисление неопределенных и определенных интегралов.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Контрольная работа 1.1.

Тема 9.

Заголовок. Свойства интеграла Римана как функции верхнего (нижнего) предела интегрирования.

Содержание. Непрерывность интеграла как функции верхнего (нижнего) предела интегрирования. Производная интеграла. Теорема Ньютона-Лейбница. Формулы Эйлера и Абеля суммирования значений функций по целым точкам.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 10.

Заголовок. Теоремы о среднем для интеграла Римана. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

Содержание. Первая и вторая теоремы о среднем. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Неравенства, содержащие интегралы. Верхняя мера Лебега и ее свойства. Множества меры нуль по Лебегу. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 11.

Заголовок. Несобственные интегралы, признаки сходимости их. Абсолютная и условная сходимость.

Содержание. Несобственные интегралы, признаки сходимости их. Абсолютная и условная сходимость. Решение задач на несобственные интегралы.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 12.

Заголовок. Кривые в многомерном пространстве. Теорема о длине дуги кривой.

Содержание. Кривые в многомерном пространстве. Теорема о длине дуги кривой. Вычисление длины дуги кривой заданной в явном, неявном, параметрическом виде и в полярных координатах.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 13.

Заголовок. Приложения определённого интеграла.

Содержание. Приложения определённого интеграла. Вычисление длин дуг, площадей фигур и объемов тел вращения и площадей поверхностей тел вращения. Приложение интеграла к задачам механики.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 14.

Заголовок. Связь между интегрируемости функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.

Содержание. Критерий измеримости множества по Жордану. Свойства меры Жордана. Измеримость спрямляемой кривой. Связь между интегрируемости функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Контрольная работа 1.2.

Тема 15.

Заголовок. Метрические и нормированные пространства.

Содержание. Метрические и нормированные пространства. N -мерное пространство, норма и метрика в нем, открытые и замкнутые множества, их свойства. Критерий компактности в n -мерном пространстве. Последовательности в метрических, нормированных пространствах и в n -мерном пространстве, их пределы, свойства. Полные метрические пространства. Принцип вложенных замкнутых шаров. Полнота в n -мерном пространстве.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 16.

Заголовок. Предел функции и его свойства в метрических и нормированных пространствах. Непрерывные функции и их свойства в метрических и нормированных пространствах.

Содержание. Предел функции и его свойства в метрических и нормированных пространствах. Непрерывные функции и их свойства в метрических и нормированных пространствах. Принцип сжимающих отображений. Связные множества в метрических и нормированных пространствах и их свойства. Путь, длина пути и ее свойства в метрических, нормированных пространствах и в n -мерном пространстве.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 17.

Заголовок. Непрерывные и дифференцируемые функции от многих переменных. Частные производные и необходимое условие дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Содержание. Дифференцируемость отображений нормированных пространств. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал. Частные производные. Геометрический смысл дифференцируемости функций нескольких переменных. Достаточные условия дифференцируемости.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 18.

Заголовок. Теорема о дифференцируемости сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила дифференцирования. Производная по направлению. Градиент. Геометрический смысл дифференциала.

Содержание. Теорема о дифференцируемости сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Производная по направлению. Градиент. Правила дифференцирования. Геометрический смысл дифференциала.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 19.

Заголовок. Частные производные высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка.

Содержание. Частные производные высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 20.

Заголовок. Дифференциалы высших порядков функции многих переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Формулы Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа.

Содержание. Дифференциалы высших порядков функции многих переменных. Достаточное условие дифференцируемости. Формулы Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 21.

Заголовок. Приложение формулы Тейлора. Локальный экстремум функции многих переменных. Достаточное условие экстремума.

Содержание. Приложение формулы Тейлора. Локальный экстремум функции многих переменных. Достаточное условие экстремума. Условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа его отыскания.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 22.

Заголовок. Неявные функции. Теорема о неявной функции.

Содержание. Теоремы о существовании и дифференцируемости неявных функций.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 23.

Заголовок. Числовые ряды.

Содержание. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Операции над рядами. Абсолютная и условная сходимости. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости: ограниченность частичных сумм, сравнения. Признаки Д'Аламбера, Коши, интегральный Коши-Маклорена, Куммера, Раабе и Гаусса. Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел. Признак Лейбница. Последовательности ограниченной вариации и их свойства. Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле. Теоремы Коши и Римана о перестановках членов ряда. Умножение числовых рядов. Теоремы Коши и Мертенса.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 24.

Заголовок. Бесконечные произведения.

Содержание. Бесконечные произведения. Условия сходимости. Разложение функции $\sin(x)$ в бесконечное произведение. Метод суммирования Чезаро (средних арифметических), его вполне регулярность и необходимое условие суммируемости. Метод суммирования Абеля. Теорема Фробениуса о суммируемости методом Абеля рядов, суммируемых по Чезаро. Вполне регулярность метода Абеля.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Контрольная работа 2.1.

Тема 25.

Заголовок. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость.

Содержание. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Операции с равномерной сходимостью. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки Вейерштрасса, Дини, Лейбница, Абеля и Дирихле равномерной сходимости. Теорема об изменении порядка пределов и следствия из нее. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 26.

Заголовок. Степенные ряды на комплексной плоскости.

Содержание. Степенные ряды на комплексной плоскости. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость суммы степенного ряда. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы. Теорема единственности. Теорема Абеля. Функции комплексного переменного.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 27.

Заголовок. Функции, зависящие от параметра.

Содержание. Функции, зависящие от параметра; равномерное стремление к пределу, связь с равномерной сходимостью последовательностей. Критерий Коши. Свойства равномерной сходимости. Перестановка пределов, дифференцирование и интегрирование функций, зависящих от параметра.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 28.

Заголовок. Собственные интегралы с параметром.

Содержание. Собственные интегралы с параметром. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса, Дини, Абеля и Дирихле. Интеграл Дирихле. Гамма-функция Эйлера как бесконечное произведение, ее интегральная форма и формула дополнения для гамма-функции.

Интеграл Пуассона. Бэта-функция Эйлера в интегральной форме. Связь функций Эйлера. Формула Стирлинга.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 29.

Заголовок. Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы.

Содержание. Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Тожество Бесселя и неравенство Бесселя. Ортогональные системы и ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье. Замкнутость, равенство Парсеваля, полнота; связь этих понятий. Пространство функций, интегрируемых с квадратом, его полнота.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 30.

Заголовок. Тригонометрические ряды Фурье и их свойства.

Содержание. Тригонометрические ряды Фурье и их свойства: линейность, инвариантность относительно сдвигов, симметрий, сжатий, дифференцирования; ряд Фурье свёртки, равенство Парсеваля, почленная интегрируемость. Представление частичных сумм. Ядро Дирихле. Признак Дини и следствия из него. Принцип локализации Римана. Суммирование тригонометрических рядов методами Чезаро-Фейера и Абеля-Пуассона. Тауберова теорема Харди. Признак сходимости Дирихле Жордана.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Контрольная работа 2.2.

Тема 31.

Заголовок. Кратный интеграл Римана. Несобственный кратный интеграл.

Содержание. Мера Жордана. Измеримые множества и их свойства. Кратный интеграл Римана, его определение и простейшие свойства. Связь интегрируемости по Риману и ограниченности. Множества меры нуль по Лебегу. Критерий интегрируемости Лебега. Теоремы о связи интеграла

Римана и меры Жордана. Теоремы о сведении кратных интегралов к повторным. Замена переменных в кратном интеграле. Общая теорема о замене переменных в кратном интеграле. Несобственный кратный интеграл.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

Тема 32.

Заголовок. Криволинейные интегралы I и II рода. Векторные поля.

Содержание. Криволинейные интегралы I и II рода, их свойства. Формула Грина. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования. Поверхности в 3-мерном пространстве, их площадь. Поверхностные интегралы I и II рода, их свойства. Кусочно-гладкие поверхности. Формула Остроградского-Гаусса. Ротор векторного поля. Формула Стокса.

лекции: 2

семинары: 2

Задания для самостоятельной работы: изучение материалов темы, решение задач, подготовка к контрольной работе.

6. Фонд оценочных средств (ФОС, оценочные и методические материалы) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю).

В течение каждого из двух семестров студенты разбирают и решают задачи, указанные преподавателем к каждому семинару, разбирают и повторяют основные понятия и теоремы, доказанные на лекциях. В каждом семестре предусмотрено по 2 контрольных работы. В конце семестра студенты сдают зачет (3 попытки по 4 ак. часа) и экзамен в форме устного собеседования с преподавателем.

6.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости, критерии и шкалы оценивания (в отсутствие утвержденных соответствующих локальных нормативных актов на факультете)

Перечень вопросов для самостоятельной работы

1. Структура открытого и замкнутого множеств на числовой оси.
2. Счетные, несчетные множества.
3. Канторово совершенное множество.
4. Монотонные функции и их свойства.
5. Канторова «лестница».
6. Функции ограниченной вариации.

7. Представление функций ОВ в виде разности монотонных функций.
8. Интеграл Римана-Стилтьеса. Классы интегрируемых функций.
9. Мера Лебега. Мера Лебега-Стилтьеса.
10. Абсолютно непрерывные функции.
11. Формула Ньютона-Лейбница.
12. Структура абсолютно непрерывных функций

Примерный перечень вопросов к коллоквиуму

1. Монотонные функции.
2. Дифференцирование монотонных функций.
3. Функции ограниченной вариации.
4. Свойства функций ограниченной вариации.
5. Классы функций ограниченной вариации.
6. Непрерывные функции ограниченной вариации.
7. Представление функции ограниченной вариации в виде разности двух монотонных функций.
8. Абсолютно непрерывные функции.
9. Сингулярные функции.
10. Интеграл Римана-Стилтьеса и его свойства.
11. Существование интеграла Стилтьеса.
12. Интегрирование по частям в интеграле Стилтьеса.
13. Вычисление интеграла Стилтьеса.
14. Приложения интеграла Стилтьеса в механике.
15. Спряженные кривые. Криволинейные интегралы 2 рода.
16. Мера Лебега-Стилтьеса.
17. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
18. Системы функций Чебышева и их свойства.
19. Системы функций Маркова и их свойства.
20. Представление систем Маркова при помощи интеграла Стилтьеса.

Примерные контрольные работы

№1

- Доказать, что если $f(x)$ - монотонная функция, удовлетворяющая равенству $f(x)+f(y)=f(x+y)$ для всех x, y и $f(1)=a$, то $f(x)=ax$.
- Найти вариацию функции на $[0, 2]$, если $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{при } x < 1, \\ 1 & \text{при } x = 1, \\ x^2 & \text{при } x > 1. \end{cases}$
- Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x=0, \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$ имеет неограниченную вариацию на $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.
- Доказать, что если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$, то она имеет ограниченную вариацию.
- Представить функцию $f(x)=\cos x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ в виде разности двух монотонных функций.

№2

- Вывести формулу интегрирования по частям для интеграла Стильбеса.

- Вычислить $\int_0^3 x^3 df(x)$, где $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{при } 1 < x < 2, \\ -4 & \text{при } 2 \leq x < 3, \\ 2 & \text{при } x = 3. \end{cases}$

- Вычислить $\int_{-1}^4 x^2 df(x)$, где $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \\ \sin x & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 2-x & \text{при } x = \frac{\pi}{2}, \\ x^2-4 & \text{при } \frac{\pi}{2} < x < 4, \\ 3 & \text{при } x = 4. \end{cases}$

- Доказать, что кривая $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x=0, \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$ неспрямляема на $[0, 1]$.

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине, критерии и шкалы оценивания

Вопросы к зачету (1 семестр)

- 1) Теорема Витали о покрытии
- 2) Теорема о дифференцировании аддитивной функции множества
- 3) Аппроксимативная дифференцируемость и обобщенные производные в смысле Соболева
- 4) Геометрически-аналитические свойства соболевских гомеоморфизмов
- 5) Об обратимости операторов композиции соболевских пространств
- 6) Ограниченность операторов композиции функций классов Соболева с измеримым отображением

Вопросы к зачету (2 семестр)

- 1) Отображения с ограниченным весовым (p,q) -искажением: Емкостные оценки
- 2) Дифференциальные формы и аппроксимативно дифференцируемые отображения
- 3) Изоморфные операторы переноса и квазиконформные отображения
- 4) Функториальность интегральных когомологий Математические модели гиперупругих материалов.
- 5) Функции запасенной энергии и вариационная формулировка задачи.
- 6) Классы допустимых деформаций.
- 7) Теорема о существовании экстремальной допустимой деформации.

Пример вопросов к экзаменам:

1 семестр (магистратура)

1. Предел последовательности и его свойства. Теорема о зажатой последовательности. Предел монотонной ограниченной последовательности. Число «е». Критерий Коши сходимости последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.
2. Два определения предела функции. Их эквивалентность. Свойства предела функции. Переход к пределу в неравенствах и теорема о зажатой функции. Критерий Коши существования предела функции. Односторонние пределы и их свойства.
3. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Предел функции по базе и его свойства. Переход к пределу по базе в неравенствах и теорема о зажатой функции. Критерий Коши существования предела по базе.
4. Непрерывные на отрезке функции и их свойства (теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса и Кантора). Теорема об обратной функции. Замечательные пределы.

5. Производная, касательная, дифференциал и их связи. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
6. Правило Лопиталья для неопределенностей $0/0$ и ∞/∞ . Формула Тейлора с различными формами остаточного члена. Ряды Тейлора. Разложения некоторых элементарных функций.
7. Достаточные условия локального экстремума. Выпуклость. Точки перегиба. Свойства выпуклых функций. Неравенство Иенсена и следствия из него. Условия выпуклости и перегиба.
8. Определенный интеграл Римана. Простейшие свойства интегралов. Критерии Коши интегрируемости. Аддитивность интегралов по отрезкам.
9. Необходимое условие интегрируемости по Риману. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману.
10. Множества меры нуль по Лебегу и их свойства. Интегрируемость ограниченных и почти всюду непрерывных функций по Риману.
11. Ограниченность и непрерывность почти всюду функций, интегрируемых по Риману. Критерий Лебега интегрируемости по Риману и следующие из него дополнительные свойства интеграла Римана.
12. Интеграл с переменным верхним пределом. Принадлежность классу Липшица при условии ограниченности. Дифференцируемость в точке. Существование первообразных. Непрерывность интегралов с переменным верхним пределом.
13. Замена переменной в интегралах. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
14. Первая и вторая теоремы о среднем для произведения функций.
15. Несобственные интегралы. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сходимости: сравнения, Абеля и Дирихле.
16. Кривые в многомерном пространстве. Теорема о длине дуги кривой.
17. Связь между интегрируемости функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.
18. Метрические и нормированные пространства. Пространство $\mathbb{R}^n$, норма и метрика в нем. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах, их свойства. Компакты. Их свойства. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки.
19. Последовательности в метрических, нормированных пространствах и в $\mathbb{R}^n$, их пределы, свойства. Полные метрические пространства. Принцип замкнутых вложенных шаров.
20. Предел функции и его свойства (в метрических и нормированных пространствах). Непрерывные функции и их свойства (в метрических и нормированных пространствах). Принцип сжимающих отображений. Непрерывные функции на компактах и их свойства.

2 семестр (магистратура)

1. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал. Частные производные. Достаточные условия дифференцируемости. Геометрический смысл дифференцируемости функций нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент.
2. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных.
3. Формула Тейлора функции нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа, Пеано и в интегральной форме.

4. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия его существования.
5. Теоремы о существовании и дифференцируемости неявных функций.
6. Условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа его отыскания.
7. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Абсолютная и условная сходимости. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости: ограниченность частичных сумм, сравнения, Коши, интегральный Коши-Маклорена. Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел. Признак сходимости Лейбница. Преобразование Абеля. Признаки сходимости Абеля и Дирихле.
8. Теоремы Коши и Римана о перестановках членов ряда. Умножение числовых рядов. Теоремы Коши и Мертенса. Бесконечные произведения. Условия сходимости. Разложение функции $\sin(x)$ в бесконечное произведение.
9. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость и операции с нею. Критерий Коши равномерной сходимости. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса и Дини. Признаки равномерной сходимости Лейбница, Абеля и Дирихле. Теорема об изменении порядка пределов и следствия из нее.
10. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов.
11. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость суммы степенного ряда. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы. Функции комплексного переменного. Формула Эйлера.
12. Функции, зависящие от параметра; равномерное стремление к пределу; связь с равномерной сходимостью последовательностей. Критерий Коши. Свойства равномерной сходимости. Перестановка пределов, дифференцирование и интегрирование пределов функций, зависящих от параметра.
13. Собственные интегралы с параметром. Их свойства: переход к пределу, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость.
14. Интеграл Дирихле. Гамма-функция Эйлера. Формула Эйлера и формула дополнения для гамма-функции. Интеграл Пуассона.
15. Бета-функция Эйлера. Связь функций Эйлера. Формула Стирлинга.
16. Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Тождество Бесселя и неравенство Бесселя.
17. Ортогональные системы и ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье. Замкнутость, равенство Парсеваля, полнота и связь этих понятий. Стремление к нулю коэффициентов Фурье абсолютно интегрируемых функций.
18. Мера Жордана. Измеримые множества и критерии их измеримости. Свойства меры Жордана.
19. Кратный интеграл Римана, его определение и простейшие свойства. Связь интегрируемости по Риману и ограниченности.
20. Множества меры нуль по Лебегу и их свойства. Критерий интегрируемости Лебега.
21. Теоремы о связи интеграла Римана и меры Жордана. Теоремы о сведении кратных интегралов к повторным.
22. Теорема о замене переменных в кратном интеграле. Несобственный кратный интеграл. Определение и свойства. Абсолютная интегрируемость.
- 23*. Криволинейные интегралы I и II рода. Формула Грина.
- 24*. Поверхностные интегралы I и II рода, их свойства. Кусочно-гладкие поверхности. Формула Остроградского-Гаусса. Ротор векторного поля. Формула Стокса.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка	2 (не зачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)
виды оценочных средств				
Знания (виды оценочных средств: опрос, тесты)	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения (виды оценочных средств: практические задания)	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) (виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

7. Ресурсное обеспечение:

7.1. Перечень основной и дополнительной литературы

Основная литература

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. *Лекции по математическому анализу*. М.: Дрофа, 2004. Издавались позднее.
2. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. «Наука», 1972 г., М.: изд-ва АСТ, Астрель, 2003. (и другие издания)

Дополнительная литература

3. Зорич В.А. *Математический анализ*. Ч. I, II. М.: Фазис, 1997, 1998; МЦНМО, 2002. Издавался позднее.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. *Математический анализ*. Т. I, II. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985; 2004.
5. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. I, II, III. М.: ГИФМЛ, 1963; СПб: Невский диалект, 2001, 2002.
6. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. *Сборник задач по математическому анализу*. Том 1, 2, 3. «Физматлит», 2003 (и другие издания).
7. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. *Задачи и упражнения по математическому анализу*. В 3-х ч. М.: Факториал, 1996.
8. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. *Задачи и упражнения по математическому анализу*. Часть 1, 2. «Дрофа», 2004 г. (и другие издания).
9. Гелбаум Б., Омстед Дж. *Контрпримеры в анализе*. М.: Мир, 1967. М.: изд-во ЛКИ, 2007.

7.2. Перечень лицензионного программного обеспечения, в том числе отечественного производства

При реализации дисциплины может быть использовано следующее программное обеспечение:

Для успешного освоения дисциплины студент использует следующие программные средства:

LaTeX

Браузеры

7.3. Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем

1. <http://www.edu.ru> – портал Министерства образования и науки РФ
2. <http://www.ict.edu.ru> – система федеральных образовательных порталов «ИКТ в образовании»
3. <http://www.openet.ru> - Российский портал открытого образования
4. <http://www.mon.gov.ru> - Министерство образования и науки Российской Федерации
5. <http://www.fasi.gov.ru> - Федеральное агентство по науке и инновациям

7.4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Math-Net.Ru [Электронный ресурс] : общероссийский математический портал / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; Российская академия наук, Отделение математических наук. - М. : [б. и.], 2010. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.

URL: <http://www.mathnet.ru>

2. Университетская библиотека Online [Электронный ресурс] : электронная библиотечная система / ООО "Директ-Медиа" . - М. : [б. и.], 2001. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц. URL: www.biblioclub.ru
3. Универсальные базы данных East View [Электронный ресурс] : информационный ресурс / East View Information Services. - М. : [б. и.], 2012. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.
URL: www.ebiblioteka.ru
4. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU [Электронный ресурс] : информационный портал / ООО "РУНЭБ" ; Санкт-Петербургский государственный университет. - М. : [б. и.], 2005. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.
URL: www.eLibrary.ru

7.5. Описание материально-технического обеспечения.

Механико-математический факультет, ответственный за реализацию данной Программы, располагает соответствующей материально-технической базой, включая необходимый аудиторный фонд. Материальная база факультета соответствует действующим санитарно-техническим нормам и обеспечивает проведение всех видов занятий (лабораторной, практической, дисциплинарной и междисциплинарной подготовки) и научно-исследовательской работы обучающихся, предусмотренных учебным планом.

8. Соответствие результатов обучения по данному элементу ОПОП результатам освоения ОПОП указано в Общей характеристике ОПОП.

9. Разработчик (разработчики) программы.

к.ф.-м..н., доцент Федоров Глеб Владимирович