Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
декан механико-математического факультета
_____/А.И. Шафаревич /
«14» октября 2021г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:
Дифференциальная геометрия

Уровень высшего образования:
магистратура

Направление подготовки / специальность:
02.04.01 "Математика и компьютерные науки" (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:
Интеллектуальные системы. Теория и приложения

Форма обучения:
очная

Рабочая программа рассмотрена и утверждена
на заседании Ученого совета Механико-математического факультета
(протокол №7, от 14 октября 2021 года)

Москва 2021

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 02.04.01 "Математика и компьютерные науки" утвержденного Приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. N 13.

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО:
дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть):
Изучение дисциплины базируется на освоении дисциплин "Математический анализ", "Линейная алгебра"

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю):

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)		
Содержание и код компетенции	**Индикатор (показатель) достижения компетенции**	**Планируемые результаты обучения по дисциплине, сопряженные с индикаторами достижения компетенций**
ОПК-1. Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1. Находит актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.1. З-1. Знает математические, естественно- научные и технические методы для решенияосновных, нестандартных задач создания и применения искусственного интеллекта ОПК-1.1. У-1. Умеет адаптировать существующие математические, естественно-научные и социально- экономические методы для решения основных, нестандартных задач создания и применения искусственного интеллекта
	ОПК-1.2. Формулирует актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.2. З-1. Знает методы решения нестандартных профессиональных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте,с применением математических, естественно- научных, социально-экономических,общеинженерных знаний и знаний в области когнитивных наук ОПК-1.2. У-1. Умеет решать основные, нестандартные задачи создания и применения искусственного интеллекта
	ОПК-1.3. Решает актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики	ОПК-1.3. З-1. Знает особенности проведения теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте ОПК-1.3. У-1. Умеет проводить теоретическое и

		экспериментальное исследование объектов профессиональной деятельности, в том числе в новойили незнакомой среде и в междисциплинарном контексте

4. Объем дисциплины (модуля) составляет 8 з.е., в том числе 136 академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 152 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий:
5.1. Структура дисциплины (модуля) по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий (в строгом соответствии с учебным планом)

Наименование разделов и тем дисциплины (модуля), **Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)**	**Номинальные трудозатраты обучающегося**			**Всего академических часов**	**Форма текущего контроля успеваемости* (наименование)**
	Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, академические часы		**Самостоятельная работа обучающегося, академические часы**		
	Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа			
Тема 1 Кривые на плоскости и в пространстве.	6	6	6	18	опрос
Тема 2 Регулярные поверхности	6	6	6	18	опрос
Тема 3 Риманова метрика	6	6	6	18	опрос
Тема 4 Геометрия на сфере и псевдосфере	6	6	6	18	опрос
Текущий контроль успеваемости			6	6	контр.раб.
Тема 5 Топологические пространства	6	6	6	18	опрос
Тема 6 Гладкие многообразия	6	6	6	18	опрос
Промежуточная аттестация (экзамен)			36	36	

Тема 7 Тензоры в линейном пространстве	6	6	6	18	опрос
Тема 8. Алгебраические операции над тензорами	6	6	6	18	опрос
Тема 9. Тензорные поля	6	6	6	18	опрос
Тема 10 Ковариантное дифференцирование	6	6	6	18	опрос
Текущий контроль успеваемости			6	6	контр.раб.
Тема 11 Параллельный перенос и геодезические	4	4	4	12	опрос
Тема 12 Кривизна	4	4	4	12	опрос
Промежуточная аттестация (экзамен)			36	36	
Итого	68	68	152	288	—

5.2. Содержание разделов (тем) дисциплины

№ п/п	Наименование разделов (тем) дисциплины	Содержание разделов (тем) дисциплин
1.	Тема 1 Кривые на плоскости и в пространстве.	Регулярные кривые, длина кривой, натуральный параметр. Кривизна кривой. Теорема о четырех вершинах. Овалы постоянной ширины. Эволюта и эвольвента плоской кривой. Пространственные кривые, кривизна, кручение, формулы Френе. Восстановление кривой по кривизне и кручению.
2.	Тема 2 Регулярные поверхности	Гладкие параметризованные поверхности в пространстве. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Кривизны нормальных сечений. Теорема Менье. Формула Эйлера. Гауссова и средняя кривизны. Минимальные поверхности. Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена. Теорема Гаусса.
3.	Тема 3 Риманова метрика	Риманова метрика в области евклидова пространства. Индуцированная риманова метрика на поверхности. Вычисление углов, длин, площадей.
4.	Тема 4 Геометрия на сфере и псевдосфере	Прямые, длина окружности, площадь треугольника, теорема косинусов на сфере и псевдосфере. Модели Пуанкаре (на круге и верхней полуплоскости) плоскости Лобачевского.
5.	Тема 5 Топологические пространства	Основные понятия топологии (топологическое пространство, непрерывное отображение, гомеоморфизм). Связность, компактность и другие свойства топологических пространств. Классификация двумерных топологических многообразий.
6.	Тема 6 Гладкие многообразия	Гладкое многообразие. Гладкие отображения и диффеоморфизмы. Касательный вектор и касательное пространство. Задание многообразий уравнениями. Ориентируемость многообразий.
7.	Тема 7 Тензоры в линейном пространстве	Координатное и инвариантное определение тензора. Билинейные формы и операторы как примеры тензоров.

8.	Тема 8. Алгебраические операции над тензорами	Сложение и умножение на число. Тензорное произведение. Свертка. Перестановка индексов. Симметричные и кососимметричные тензоры.
9.	Тема 9. Тензорные поля	Тензорные поля. Дифференциальные формы, операция внешнего дифференцирования. Коммутатор векторных полей.
10.	Тема 10 Ковариантное дифференцирование	Аффинная связность на многообразии. Симметричная риманова связность. Формулы для символов Кристоффеля через метрику.
11.	Тема 11 Параллельный перенос и геодезические	Операция параллельного переноса. Свойства параллельного переноса для римановой связности. Уравнения геодезических. Локальная минимальность геодезических. Геодезические на поверхностях вращения.
12.	Тема 12 Кривизна	Тензор кривизны Римана. Его симметрии. Скалярная кривизна.

6. Фонд оценочных средств (ФОС, оценочные и методические материалы) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю).

6.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости, критерии и шкалы оценивания (в отсутствие утвержденных соответствующих локальных нормативных актов на факультете)

Примерные темы практических занятий

Практическое занятие 1. Определение топологического пространства,
примеры топологических пространств. Топология, порожденная множеством подмножеств и база топологии.

Практическое занятие 2. Замкнутые множества и их свойства.

Практическое занятие 3. Топология метрического пространства и некоторые ее свойства

Практическое занятие 4. Окрестности точек и их свойства (на примерах различных пространств). Внутренность множества и замыкание множества.

Практическое занятие 5. Непрерывные отображения и их свойства

Вопросы и задания для самостоятельной работы.

1. Задание топологии с помощью системы замкнутых окрестностей.
2. Понятия базисных окрестностей.
3. Кривая на многообразии.
4. Дифференциал.
5. Теорема Стокса.
6. Коммутатор векторных полей.
7. Векторы Киллинга.
8. Аффинный параметр.
9. Геодезическая.
10. Тензор кручения.
11. Сигнатура.
12. Гиперповерхность.
13. Уравнения Гаусса.

Примеры заданий для контрольных работ

1. Вычислить кривизну и кручение кривой $r(t) = (2t, \ln t, t^2)$ в точке $t = 1$.
2. Вычислить гауссову и среднюю кривизны поверхности $r(u,v) = (v \cos 2u, v \sin 2u, v)$ в точке $(u,v) = (0,2)$.
3. Найти площадь круга радиуса 2 на плоскости Лобачевского.
4. Вычислить эйлерову характеристику тора.

5. Вычислить тензорное произведение вектора $\partial/\partial x^1 + 3\partial/\partial x^2$ и ковектора $2dx^1 - dx^2$ и найти свертку полученного тензора.
6. Вычислить символ Кристоффеля $\Gamma^2{}_{11}$ для метрики $ds^2 = v(du^2+dv^2)$ в точке с координатами $(u,v) = (1,1)$.
7. Выписать уравнение параллельного переноса для параллели на сфере и решить его.
8. Вычислить скалярную кривизну для метрики $ds^2 = u(du^2+dv^2)$ в точке с координатами $(u,v) = (1,0)$.

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине, критерии и шкалы оценивания

Вопросы к зачету (1 семестр)

1. Задание топологии.
2. Операция замыкания.
3. Отображение топологических пространств.
4. Отделимые пространства.
5. Аксиомы счетности.
6. Многообразия.
7. Отображение многообразий.
8. Касательный вектор. Касательное пространство.
9. Дуальное пространство. Формы.

Вопросы к зачету (2 семестр)

10. Тензоры. Тензорное произведение.
11. Внешнее дифференцирование.
12. Производная Ли.
13. Ковариантная производная.
14. Тензор кривизны.
15. Метрический тензор.
16. Изотропный конус.
17. Элемент объема и теорема Гаусса.
18. Понятие расслоения.

Вопросы к экзамену (1 семестр)

1. Регулярные кривые в евклидовом пространстве. Длина кривой. Натуральный параметр.
2. Кривизна кривой. Формулы Френе для плоской кривой. Теорема о восстановлении плоской кривой по кривизне.
3. Кручение кривой. Формулы Френе для пространственной кривой. Теорема о восстановлении кривой по кривизне и кручению.

4. Регулярные поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Вычисление длин кривых, углов и площадей на поверхности.
5. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные кривизны и главные направления. Гауссова и средняя кривизны поверхности.
6. Кривизна кривой на поверхности. Теорема Менье.
7. Кривизны плоских сечений. Формула Эйлера.
8. Сферические координаты. ``Прямые'', длина окружности, площадь треугольника, теорема косинусов на сфере.
9. Псевдоевклидовы пространства. Псевдосферические координаты. Примеры изометрий псевдосферы.
10. ``Прямые'', длина окружности, площадь треугольника, теорема косинусов на псевдосфере.
11. Стереографическая проекция. Модели Пуанкаре (на круге и верхней полуплоскости) плоскости Лобачевского.
12. Топологические пространства. Непрерывные отображения и гомеоморфизмы. Связность и линейная связность.
13. Компактные топологические пространства. Их простейшие свойства.
14. Топологические и гладкие многообразия. Гладкие функции на многообразии. Гладкие отображения многообразий, диффеоморфизм.
15. Касательный вектор к многообразию. Касательное пространство. Дифференциал гладкого отображения.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

16. Ориентируемость многообразий. Перенос ориентации вдоль пути.
17. Многообразия, заданные уравнениями в R^n. Их ориентируемость.
18. Примеры двумерных многообразий. Склейки из многоугольников. Теорема классификации компактных двумерных многообразий.
19. Представление двумерных многообразий в виде связных сумм торов и проективных плоскостей. Эйлерова характеристика.
20. Тензоры и тензорные поля на многообразии. Примеры тензоров ранга 1 и 2 (векторы, ковекторы, операторы, билинейные формы).
21. Тензорные алгебраические операции (сложение, тензорное умножение, перестановка индексов, свертка).
22. Симметричные и кососимметричные тензорные поля. Внешние дифференциальные формы. Внешнее умножение форм.
23. Внешнее дифференцирование внешних форм. Группы когомологий.
24. Интеграл внешней формы по подмногообразию. Формула Стокса.
25. Операция ковариантного дифференцирования тензорных полей. Формула для символов Кристоффеля (через метрику).
26. Операция параллельного переноса вектора вдоль кривой. Уравнения параллельного переноса.
27. Уравнения геодезических и их свойства (существование и локальная минимальность).
28. Тензор кривизны Римана. Координатное и инвариантное определения.
29. Алгебраические свойства тензора кривизны. Тензор Риччи, скалярная кривизна. Уравнения Эйнштейна.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка	2 (не зачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)

виды оценочных средств				
Знания *(виды оценочных средств: опрос, тесты)*	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения *(виды оценочных средств: практические задания)*	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности непринципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) *(виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)*	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

7. Ресурсное обеспечение:

7.1. Перечень основной и дополнительной литературы

Основная литература

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т., «Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии», М.: Физматлит, 2004.
2. Мищенко А.С., Соловьёв Ю.П., Фоменко А.Т., «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии», М.: Физматлит, 2001.

Дополнительная литература

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т., «Курс дифференциальной геометрии и топологии», М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.
2. Рашевский П.К., «Курс дифференциальной геометрии», М.: URSS, 2019.
3. Рашевский П.К., «Риманова геометрия и тензорный анализ», М.: URSS, 2014.

7.2. Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем

1. http://www.edu.ru – портал Министерства образования и науки РФ
2. http://www.openet.ru - Российский портал открытого образования
3. http://www.mon.gov.ru - Министерство образования и науки Российской Федерации
4. http://www.fasi.gov.ru - Федеральное агентство по науке и инновациям

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Math-Net.Ru [Электронный ресурс] : общероссийский математический портал / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; Российская академия наук, Отделение математических наук. - М. : [б. и.], 2010. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.
URL: http://www.mathnet.ru
3. Универсальные базы данных East View [Электронный ресурс] : информационный ресурс / East View Information Services. - М. : [б. и.], 2012. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.
URL: www.ebiblioteka.ru
4. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU [Электронный ресурс] : информационный портал / ООО "РУНЭБ" ; Санкт-Петербургский государственный университет. - М. : [б. и.], 2005. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.
URL: www.eLibrary.ru

7.4. Описание материально-технического обеспечения.

Механико-математический факультет, ответственный за реализацию данной Программы, располагает соответствующей материально-технической базой (аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий, проекционное оборудование), соответствующей действующим санитарно-техническим нормам, и обеспечивает проведение всех видов занятий, предусмотренных учебным планом.

8. Соответствие результатов обучения по данному элементу ОПОП результатам освоения ОПОП указано в Общей характеристике ОПОП.

9. Разработчик (разработчики) программы:
д.ф.-м.н., профессор Ошемков Андрей Александрович