Решение

Составим уравнение моментов относительно точки О. Обозначим через φ угол отклонения маятника, тогда количество движения

$$K = m\dot{\varphi}l$$

Помножив на плечо *l* , получим момент количества движения:

$$L_0 = m\dot{\varphi}l^2.$$

Момент силы натяжения нити относительно точки *O* всегда равен нулю, а момент силы *G*

M_o = — Gl sinφ= - mgl sinφ

Подставляя в уравнение моментов и сокращая на *ml*, получим

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi.$$

Положим **sin φ = φ.**

Тогда уравнение принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Для интегрирования этого уравнения составим характеристическое уравнение

$$z^2 + \frac{g}{l} = 0.$$

Корни характеристического уравнения мнимые:

$$z_1 = +i\sqrt{\frac{g}{l}}; \quad z_2 = -i\sqrt{\frac{g}{l}},$$

следовательно, общее решение имеет вид

$$\varphi = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

где C_1 и C_2—постоянные интегрирования.

Продифференцируем по времени полученное уравнение:

$$\dot{\varphi} = -C_1\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

Определим C_1 и C_2:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\sqrt{gl}}.$$

Обозначая вторую постоянную буквой α, получим

$$\varphi = \alpha \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Это уравнение определяет угол поворота как функцию времени, т.е. является кинематическим уравнением качания математического маятника.

Величина

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = k$$

- это частота качаний математического маятника.

Она связана с периодом качаний математического маятника обратной зависимостью

$$\tau_м = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Следовательно, период малых качаний математического маятника зависит только от длины нити и от ускорения g свободно падающего тела.