**И.Д.Ремизов**

# Развёрнутый план докторской диссертации на тему

# «Преподавание операторных полугрупп в высшей школе»

Диссертационное исследование посвящено проблеме повышения эффективности обучения функциональному анализу и математической физике в вузе путём более подробного изучения полугрупп операторов. В работе представлена целостная дидактическая система, позволяющая вводить в образовательный процесс сложные аппроксимационные методы (теорема Чернова) на основе теории операторных полугрупп, а также методика формирования у студентов исследовательских компетенций в области эволюционных уравнений.

Специальность: 5.8.2 – Теория и методика обучения и воспитания (математика, уровень высшего образования).

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

## Введение

Во введении обосновывается актуальность исследования. Теория операторных полугрупп — фундамент квантовой механики и дифференциальных уравнений, однако в классических курсах она либо отсутствует, либо излагается формально-аксиоматически, что вызывает когнитивные затруднения у студентов. Метод Чернова, дающий конструктивные аппроксимации, открывает уникальную педагогическую возможность: от абстрактного оператора к явной формуле.

Объект исследования – процесс обучения функциональному анализу и математической физике в высшей школе.
Предмет исследования – содержание, методы и организационные формы обучения теории операторных полугрупп и черновским аппроксимациям.

Цель – разработка, теоретическое обоснование и экспериментальная проверка дидактической системы, обеспечивающей осознанное усвоение студентами методов аппроксимации решений эволюционных уравнений.

Научная новизна (педагогическая) заключается в:

1. Разработке классификации математических трудностей при изучении полугрупп и выделении их типов (операторно-топологические, аналитические, алгоритмические).
2. Создании методики «от явной формулы к предельному оператору» в противовес традиционному дедуктивному подходу.

3. Внедрении комплекса учебно-исследовательских задач, основанных на оригинальных научных результатах соискателя (аппроксимации для параболических, уравнения Шрёдингера, эллиптических уравнений и ОДУ).

Практическая значимость: разработанный курс внедрён в учебный процесс факультета математики, информатики и компьютерных наук ВШЭ (кампус в г. Нижний Новгород), создан программный модуль для компьютерного практикума.

## Глава 1. Теоретико-методологические основы обучения теории операторных полугрупп в высшей школе

1.1. Анализ состояния преподавания функционального анализа в российских и зарубежных университетах. Проводится сравнительный анализ рабочих программ (МГУ, СПбГУ, НГУ, Гарвард, ETH Zurich). Выявляется дефицит разделов, связанных с конструктивными аппроксимациями.
1.2. Психолого-дидактические барьеры при восприятии абстрактных операторных полугрупп. Описываются типичные ошибки студентов: смешение сильной и равномерной топологии, непонимание роли генератора, трудности с переходом от матричного экспонента к операторному.
1.3. Принципы отбора содержания учебного материала по черновским аппроксимациям. Обосновывается, почему именно метод Чернова (на основе работ диссертанта) является дидактически ценным: он даёт явные формулы для допредельных выражений, что позволяет студенту «увидеть» как работают переменные коэффициенты.
1.4. Модель формирования исследовательских компетенций. Вводится трехуровневая модель: базовый (понимание теоремы), продвинутый (построение аппроксимаций для конкретных уравнений), исследовательский (доказательство оценок скорости сходимости аппроксимаций).

## Глава 2. Методика изучения теоремы Чернова и построения аппроксимаций для параболических уравнений (на основе результатов автора)

2.1. Методика введения понятия «функции Чернова» и «касательной Чернова». Предлагается набор опорных задач, подводящих студентов к самостоятельному «открытию» этой функции на примере одномерного уравнения теплопроводности.
2.2. Конструирование учебных заданий для случая $R^n$ и многообразий. Разрабатываются практические работы, где студенты строят

аппроксимации для переменного коэффициента теплопроводности. Используются полученные диссертантом явные формулы – они становятся основой для лабораторного практикума.
2.3. Методика использования компьютерной алгебры (системы Maple/Matlab) для визуализации сходимости. Показывается, как численные эксперименты (в том числе на основе работ, написанных диссертантом совместно с Никбахт и Драгуновой) могут быть использованы как обучающий инструмент для исследования устойчивости и скорости.

## Глава 3. Обучение построению черновских аппроксимаций для уравнения Шрёдингера и эллиптических уравнений (дидактический аспект)

3.1. Методика введения формулы $R(t)=\exp(i(S(t)-I))$ в учебном процессе. Показывается, как перейти от вещественных параболических задач к комплексным. Разрабатывается система задач на применение этой формулы к уравнению с производными высокого порядка.
3.2. Методика обучения аппроксимации резольвент. Показано, как результат диссертанта о резольвентах позволяет студентам решать новые классы задач – эллиптические уравнения и ОДУ. Это ломает стереотип, что метод Чернова — только для эволюционных задач.
3.3. Межпредметные связи: Квантовая физика и математика. Разрабатываются кейсы, связывающие теорему Стоуна (из введения) и черновские аппроксимации, что усиливает мотивацию будущих физиков.

## Глава 4. Методика исследования скорости сходимости черновских аппроксимаций в учебно-научном семинаре

4.1. Организация научно-исследовательской работы студентов (НИРС) на основе оценки скорости. Описывается методика постановки исследовательской задачи: как студенты могут получать оценки типа теоремы Галкина-Ремизова.
4.2. Методика построения примеров с экстремальной скоростью (сколь угодно быстрая/медленная сходимость). Эти примеры – фонд задач для спецкурса. Разрабатывается методика «эвристических задач», где студенты учатся конструировать контрпримеры.
4.3. Использование численного эксперимента для формирования статистического мышления. Анализируются данные экспериментов с различной гладкостью начальных условий. Разрабатываются шаблоны отчётов, где студент учится связывать теоретические оценки с машинными вычислениями.

## Глава 5. Экспериментальная проверка эффективности разработанной дидактической системы

5.1. Организация, этапы и методы педагогического эксперимента. Описывается констатирующий, формирующий и контрольный этапы. Выборка: студенты 3-4 курсов факультета математики, информатики и компьютерных наук ВШЭ (кампус в г. Нижний Новгород).
5.2. Критерии и показатели обученности. Разрабатываются диагностические контрольные работы, сравнивающие уровень усвоения в экспериментальной (где внедрён курс диссертанта) и контрольной (традиционный курс) группах. Критерии: понимание топологии, умение построить аппроксимацию, умение оценить погрешность.
5.3. Анализ результатов эксперимента. Приводятся статистически значимые данные (критерий Стьюдента, $\chi^2$), доказывающие, что студенты, изучавшие полугруппы через метод Чернова, показывают более высокие результаты в решении прикладных задач и лучше понимают абстрактную теорию.
5.4. Методические рекомендации по преподаванию раздела «Черновские аппроксимации». Даются чёткие инструкции: количество часов, структура лекций, тематика практических занятий, список рекомендуемых задач из публикаций диссертанта.

## Заключение

В заключении формулируются основные результаты диссертационного исследования:

1. Разработана и теоретически обоснована дидактическая система обучения теории операторных полугрупп на основе метода Чернова.
2. Выявлены и классифицированы типичные затруднения студентов и предложены пути их преодоления через явные конструктивные формулы.
3. Создан и апробирован учебно-методический комплекс (УМК), включающий задачники, материалы для семинаров и программы компьютерного практикума.
4. Экспериментально подтверждено, что предложенная методика повышает уровень сформированности исследовательских компетенций будущих математиков и физиков.
5. Определены перспективы дальнейшего развития: распространение методики на бесконечномерный анализ и квантовую теорию поля в рамках магистерских программ.



