

И.Д.Ремизов

**Развёрнутый план докторской диссертации на тему
«Черновские аппроксимации операторных полугрупп»**

Диссертационное исследование И.Д.Ремизова относится к специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Результаты диссертации в основном посвящены построению и исследованию основанных на теореме Чернова методов аппроксимации сильно непрерывных полугрупп линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве (также называемых C_0 -полугруппами).

Диссертация по плану состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы.

Во введении планируется дать краткий обзор места теории операторных полугрупп в общем контексте современной науки, обосновать актуальность разработки метода черновских аппроксимаций, а также сжато изложить результаты диссертации. Приведём эту информацию из введения со значительными сокращениями ниже, а затем укажем названия глав диссертации и кратко опишем содержание каждой главы.

Теорию операторных полугрупп стало невозможно вычеркнуть из анналов мировой науки в 1932 году, когда в *Annals of Mathematics* была опубликована знаменитая теорема Стоуна, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между самосопряжёнными операторами H в гильбертовом пространстве и сильно непрерывными группами $\exp(-itH)$ унитарных операторов в этом гильбертовом пространстве. Эта теорема обосновывает существование решений у любого уравнения Шрёдингера с самосопряжённым гамильтонианом H , тем самым гарантируя существование динамики (наличия будущих состояний при известном начальном состоянии) для любой квантовой системы. В силу этого теорема Стоуна является одним из математических оснований для аксиом квантовой механики в представлении Шрёдингера — выдающегося достижения XX века, до сих пор не утратившего своей актуальности. При этом на протяжении своей почти вековой истории квантовая механика остаётся одной из наиболее точно проверенных экспериментально теорий, описывающих окружающий нас мир.

Дальнейшее развитие теории однопараметрических операторных полугрупп связано с именами Троттера, Като, Хилле, Иосиды, Филлипса и других ученых, исследовавших общие свойства таких полугрупп и уточнивших её связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных. В 1968 году Пол Чернов (Paul R. Chernoff) в своей кандидатской диссертации в Гарвардском университете опубликовал носящую сейчас его имя теорему – теорему Чернова об аппроксимации операторных полугрупп. В начале 2000-х профессор МГУ О.Г.Смолянов (научный руководитель по кандидатской

диссертации И.Д.Ремизова) начал систематически использовать теорему Чернова для приближённого нахождения решений дифференциальных уравнений. При этом решение представляется в виде предела сходящихся к нему функций, называемых черновскими аппроксимациями, а ценность такого представления в том, что аппроксимации явно выражаются через переменные коэффициенты уравнения с помощью элементарных функций. В рамках этого подхода за последние 20 лет ученики Смолянова во многих ситуациях получили черновские аппроксимации для решений уравнения Шрёдингера и параболических дифференциальных уравнений с переменными вещественными коэффициентами.

В докторской диссертации И.Д.Ремизова предложен ряд конкретных новых методов построения черновских аппроксимаций, общие универсальные методы построения одних черновских аппроксимаций по известным другим черновским аппроксимациям, а также численно и теоретически изучена скорость сходимости черновских аппроксимаций. Кроме того, И.Д.Ремизовым предложен метод построения черновских аппроксимаций резольвент генераторов полугрупп, что позволило впервые получать аппроксимации решений новых типов уравнений. До работ И.Д.Ремизова черновские аппроксимации строились только для эволюционных дифференциальных уравнений с частными производными: параболических с вещественными коэффициентами, а также уравнений типа Шрёдингера с комплексными коэффициентами. С помощью результата И.Д.Ремизова об аппроксимации резольвент появилась возможность строить черновские аппроксимации к решениям эллиптических уравнений с частными производными, а также к решениям обыкновенных дифференциальных уравнений.

Все эти методы, разумеется, применимы к уравнениям с переменными коэффициентами, а переменные коэффициенты в явном образом входят как параметры в выражения для аппроксимаций. При этом в выражающей формуле содержится предельный переход (черновские аппроксимации сходятся к решению), однако сами допредельные выражения явно выражены через коэффициенты уравнения и ясно, как вычислять предел – то есть, для его вычисления имеется алгоритм, и не требуется проводить неконструктивные процедуры (аналитическое продолжение, основанные на аксиоме выбора конструкции и прочее). Таким образом, черновские аппроксимации подходят для приближённого вычисления решения дифференциальных уравнений с частными производными на ЭВМ.

Кроме того, основанные на теореме Чернова конструкции находят применение в теоретических построениях: для математического обоснования интеграла по траекториям (интеграла Фейнмана, континуального интеграла), для усреднения случайных неограниченных операторов и в других ситуациях (общим числом не менее 15), см. обзор Ya. A. Butko. *The method of Chernoff approximation*. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2020. Не менее 40 из опубликованных в 2000-2020 годах работ О.Г.Смолянова, его соавторов и учеников посвящены

приложениям черновских аппроксимаций в различных разделах математической физики и бесконечномерного анализа, и число таких работ продолжает расти. По данным Google Scholar на октябрь 2023 статья Пола Чернова, содержащая формулировку знаменитой теоремы Чернова, была процитирована 525 раз даже при том, что не в каждой работе, где используются черновские аппроксимации, есть ссылка на оригинальную статью Чернова, так как сослаться на учебники или содержащие более современные версии теоремы иногда удобнее.

В связи с несомненной теоретической и возможной практической важностью метода черновских аппроксимаций актуален вопрос о скорости сходимости этих аппроксимаций. Исследования в этой области ведутся учёными по всему миру (см. *V.A. Zagrebnov. Notes on the Chernoff product formula. Journal of Functional Analysis, 2020* и ссылки там) в основном в теоретическом ключе и ещё далеки от завершения. В этом направлении И.Д.Ремизов совместно с О.Е.Галкиным получил прорывные результаты – теорему, дающую оценки на скорость сходимости черновских аппроксимаций в общем случае, а также примеры сколь угодно быстро и сколь угодно медленно сходящихся аппроксимаций. Также совместно с Н.Никбахт и К.А.Драгуновой численно была исследована скорость сходимости в конкретных ситуациях (одномерное уравнение теплопроводности, его аналоги для случая переменного коэффициента теплопроводности), при этом в вычислительных экспериментах были обнаружены эффекты, не имеющие на данный момент теоретического объяснения, что можно классифицировать как научное открытие.

Приведём предварительный список глав с их названиями и кратко укажем содержание этих глав.

Первая глава называется «Теоремы типа Чернова, функции Чернова и касательные Чернова» и носит частично вводный характер, поэтому в первой части она содержит классические результаты теории черновских аппроксимаций, а далее – принадлежащие автору диссертации определения, конструкции и теоремы. Кроме того, первая глава содержит предложенное диссертантом доказательство теоремы, формулировка которой была дана О.Г.Смоляновым в 2015 году как частичное обобщение одного из результатов И.Д.Ремизова.

Вторая глава называется «Черновские аппроксимации решений параболических дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка» и посвящена изложению результатов автора по указанной теме. Рассматриваются предложенные диссертантом аппроксимации для решений уравнений в R^1 , R^n и на многообразиях.

Третья глава называется «Формула $R(t)=\exp(i(S(t)-I))$ и её следствия» и содержит предложенный диссертантом универсальный способ построения черновских аппроксимаций к полугруппе $\exp(itH)$ если известна касательная Чернова $S(t)$ к произвольному самосопряжённому оператору H . А именно, если $S(t)=S(t)^*$, $H=H^*$, то функция $R(t)=\exp(i(S(t)-I))$ является функцией Чернова для оператора iH , и $\exp(itH)=\lim_{n \rightarrow \infty} R(t/n)^n$ в сильной операторной топологии. С помощью этого результата построены черновские аппроксимации к нескольким уравнениям типа Шрёдингера, в том числе к одномерному уравнению, содержащему переменные коэффициенты и производные сколь угодно высокого порядка.

Четвертая глава называется «Метод построения черновских аппроксимаций резольвент генераторов полугрупп и его приложения», название её отражает содержание. В качестве приложений приводятся черновские аппроксимации к решениям эллиптического дифференциального уравнения с частными производными, а также к решениям обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на прямой.

Пятая глава называется «Скорость сходимости черновских аппроксимаций» и содержит полученные совместно И.Д.Ремизовым и О.Е.Галкиным результаты – теорему, дающую оценки на скорость сходимости черновских аппроксимаций в общем случае, а также примеры сколь угодно быстро и сколь угодно медленно сходящихся аппроксимаций. Также излагаются полученные совместно с Н.Никбахт и К.А.Драгуновой результаты численного эксперимента, посвящённого исследованию скорости сходимости в конкретных ситуациях, при начальных условиях различной гладкости.

В силу сказанного выше ясно, что диссертация И.Д.Ремизова посвящена актуальным научным вопросам, автором самостоятельно и с соавторами получены результаты мирового уровня (что подтверждается публикациями в международных научных журналах), исследования в этом направлении активно ведутся учёными по всему миру. При этом результаты И.Д.Ремизова известны и цитируются специалистами, по Google Scholar: индекс Хирша у И.Д.Ремизова в октябре 2023 равен 10, самая цитируемая статья *I.D.Remizov. Quasi-Feynman formulas – a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation*// *Journal of Functional Analysis*, 2016 процитирована 49 раз.

