Определение 6. Число n — количество векторов в любом базисе линейного пространства R^n — называют *размерностью* R^n и записывают это как $n = \dim R^n$ (сокр. *dimension* (англ.) — *размерность*).

Приведём без доказательства следующую теорему:

Теорема 3. Для того чтобы n векторов-столбцов $\mathbf{b}_1 = (b_{11}; \ldots; b_{n1})^T$, ..., $\mathbf{b}_n = (b_{1n}; \ldots; b_{nn})^T$ образовывали базис в R^n, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы $B = (b_{ij})$, составленной из этих векторов-столбцов, был отличен от 0, т.е. $\det(b_{ij}) \neq 0$.

4. Координаты вектора в базисе. Пусть $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ — некоторый базис линейного пространства R^n. Как уже было отмечено выше, добавление любого вектора $\mathbf{x} \in R^n$ приводит к линейно зависимой системе. Покажем, что вектор $\mathbf{x}$ будет линейно выражаться через векторы базиса $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$. В самом деле, пусть $c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_n\mathbf{b}_n + c_{n+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ — нетривиальная линейная зависимость. Если $c_{n+1} = 0$, то тогда равенство $c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$ влечёт за собой равенство $c_1 = \ldots = c_n = 0$, поскольку базис — линейно независимая система. Значит, $c_{n+1} \neq 0$ в нетривиальном соотношении $c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_n\mathbf{b}_n + c_{n+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Отсюда

$$\mathbf{x} = -\frac{c_1}{c_{n+1}}\mathbf{b}_1 - \ldots - \frac{c_n}{c_{n+1}}\mathbf{b}_n.$$

Такую запись будем называть разложением вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$.

Пусть $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ — некоторый базис линейного пространства R^n, $\mathbf{x} \in R^n$ и $\mathbf{x} = k_1\mathbf{b}_1 + \ldots + k_n\mathbf{b}_n$ — разложение по базису.

Определение 7. Числа $k_1, \ldots, k_n$ — коэффициенты разложения по базису — называются *координатами* вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$.

Замечание. Если $\mathbf{x} = (x_1; \ldots; x_n) \in R^n$, то, как мы видели, имеет место разложение $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$, где $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — стандартный базис. Таким образом, числа $x_1, \ldots, x_n$ являются координатами вектора $\mathbf{x} = (x_1; \ldots; x_n)$ в стандартном базисе.

Символически разложение по базису $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ можно записывать в виде

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ \ldots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Здесь подразумевается умножение строки (состоящей из векторов базиса) на столбец координат вектора в данном базисе, которое производится по правилу матричного умножения.

Теорема 4. Координаты вектора в базисе определяются единственным образом, т.е. из равенства $\mathbf{x} = k_1\mathbf{b}_1 + \ldots + k_n\mathbf{b}_n = t_1\mathbf{b}_1 + \ldots + t_n\mathbf{b}_n$ следует, что $k_1 = t_1$, ..., $k_n = t_n$.

Доказательство. Поскольку

$$\mathbf{0} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = (k_1 - t_1)\mathbf{b}_1 + \ldots + (k_n - t_n)\mathbf{b}_n,$$

а базис — линейно независимая система, то такая линейная зависимость векторов базиса должна быть тривиальной, т.е. $k_1 - t_1 = 0$, ..., $k_n - t_n = 0$. Ч.т.д.

Пример 2. Покажем, что векторы

$$\mathbf{b}_1 = (1;\, 2;\, 3)^T,\ \mathbf{b}_2 = (1;\, 1;\, 2)^T,\ \mathbf{b}_3 = (1;\, 1;\, 1)^T$$

образуют базис в R^3 и найдём координаты вектора $\mathbf{x} = (4;\, 7;\, 5)^T$ в этом базисе.

Решение. По теореме 3 сначала достаточно проверить, что определитель, составленный из координат векторов (записанных по столбцам), отличен от 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 1 = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ — базис в R^3.

Чтобы найти координаты k_1, k_2, k_3 вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, запишем равенство