

ПРОИЗВОДНАЯ

Домашняя работа

$$1.301. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 7x + 4} - 2x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 7x + 4} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 7x + 4} + 2x)}{\sqrt{4x^2 - 7x + 4} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 7x + 4 - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x}{|2x| + 2x}$$

$$= -\frac{7}{4}$$

$$1.305. \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cot \pi x = [0 \cdot \infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\overset{\rightarrow 1}{\cancel{\cos \pi x}}}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi}$$

5.56 $y = x^2 \cdot e^{-2x}$

$$y' = 2x \cdot e^{-2x} + x^2 \cdot e^{-2x} \cdot (-2) =$$

$$= 2xe^{-2x} (1 - x)$$

$$5.329. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{p.l.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{0}{-2\cancel{\sin 2x}}}{\underset{1}{\cancel{\cos 2x}} \cdot \underset{1}{2\cancel{\cos 2x}}} = 0$$

$$5.330. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{p.l.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x^2+1}}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}(x^2+1)} = \frac{1}{3}$$

5.82. $y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}$ $y' = ?$

1. $\ln y = \frac{1}{3}(\ln|x+2| + 2\ln|x-1| - 5\ln|x|)$

2. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x}\right) =$

$$= \frac{x^2 - x + 2x(x+2) - 5(x+2)(x-1)}{3x(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2x + 10}{3x(x+2)(x-1)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2 + x - 5}{x(x+2)(x-1)}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}} \cdot \frac{x^2 + x - 5}{x(x+2)(x-1)} =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2 + x - 5}{x^{8/3}(x+2)^{2/3}(x-1)^{1/3}}$$

5.84. $y = (\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}}$ $y' = ?$

1. $\ln y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} \cdot \ln x = \frac{1}{2} (x^{1/3} \cdot \ln x)$

2. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \ln x + x^{1/3} \cdot \frac{1}{x} \right) =$
 $= \frac{1}{6} \left(\frac{\ln x + 3}{x^{2/3}} \right)$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{6} \cdot x^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3}} (\ln x + 3)$

5.91

$$y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$$

$$y' = ?$$

$$\begin{aligned} 1. \ln y &= \ln((\ln x)^x) - \ln(x^{\ln x}) = \\ &= x \cdot \ln \ln x - (\ln x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{y'}{y} &= \left(\ln \ln x + x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \right) - 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \ln \ln x + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \cdot \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right)$$

5.92 $y = x^{x^2} + x^{2^x} + 2^{x^x}$

$y' = ?$

$y' = (y_1)' + (y_2)' + (y_3)'$

1) $y_1 = x^{x^2} \Rightarrow 1. \ln y_1 = x^2 \ln x$

2. $\frac{y_1'}{y_1} = 2x \cdot \ln x + x$

$y_1 \Rightarrow y_1' = x^{x^2} \cdot x (2 \ln x + 1)$

2) $y_2 = x^{2^x} \Rightarrow 1. \ln y_2 = 2^x \cdot \ln x$

2. $\frac{y_2'}{y_2} = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln x + 2^x \cdot \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y_2' = x^{2^x} \cdot \frac{2^x}{x} (x \ln 2 \cdot \ln x + 1)$

3) $y_3 = 2^{x^x} \Rightarrow y_3' = 2^{x^x} \cdot \ln 2 \cdot (x^x)' = 2^{x^x} \cdot x^x \cdot \ln 2 (\ln x + 1)$

$y = 2^t \Rightarrow y_t' = 2^t \cdot \ln 2$ $(x^x)' = x^x \cdot (\ln x + 1)$

$a^{b^c} = a^{(b^c)}$

$\neq (a^b)^c$

T.K. $b^c \neq bc$

5.93 $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^2 x})$

Пусть $\cos^2 x = t$, тогда

$$t' = 2\cos x \cdot (\cos x)' =$$

$$= -2\sin x \cos x =$$

$$= -\sin 2x$$

$$\Rightarrow y' = \left(\ln(t + \sqrt{1+t}) \right)'_t \cdot t' =$$

$$= \frac{1}{t + \sqrt{1+t}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+t}} \right) \cdot t' =$$

$$= \frac{-\sin 2x}{\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^2 x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}} \right)$$

5.464

$$y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$$

1. $x \neq 1$ $y \in \mathbb{R}$

2. OY: $x=0 \Rightarrow y=0$

OX: $y=0 \Leftrightarrow x=0$

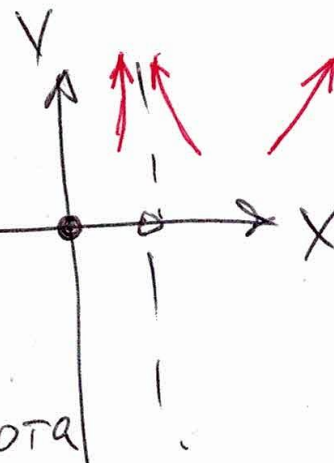
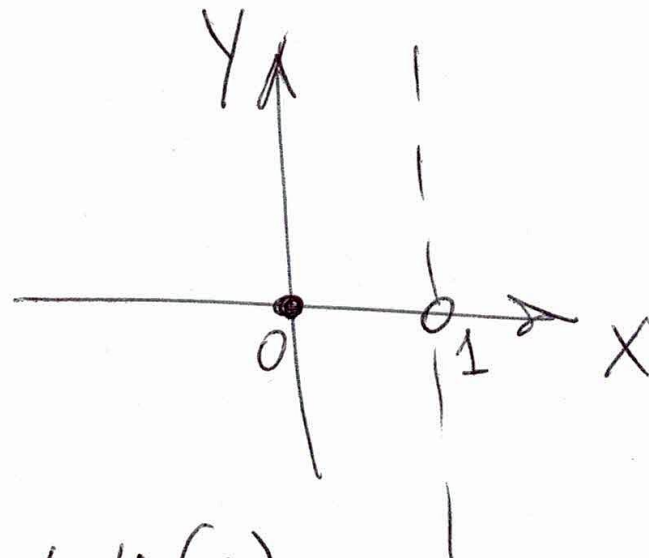
3. $y(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x-1)^2} = -\frac{x^3}{2(x+1)^2} \neq y(x)$
 $\neq -y(x)$

4. Поведение на концах ООФ:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x^3}{2(x-1)^2} = \left[\frac{1}{2 \cdot (+0)} \right] = +\infty$$

$\exists$ верт. асимптота
 $x=1$



5. Наклонная асимптота:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2(x-1)^2 \cdot x} = \frac{1}{2}$$

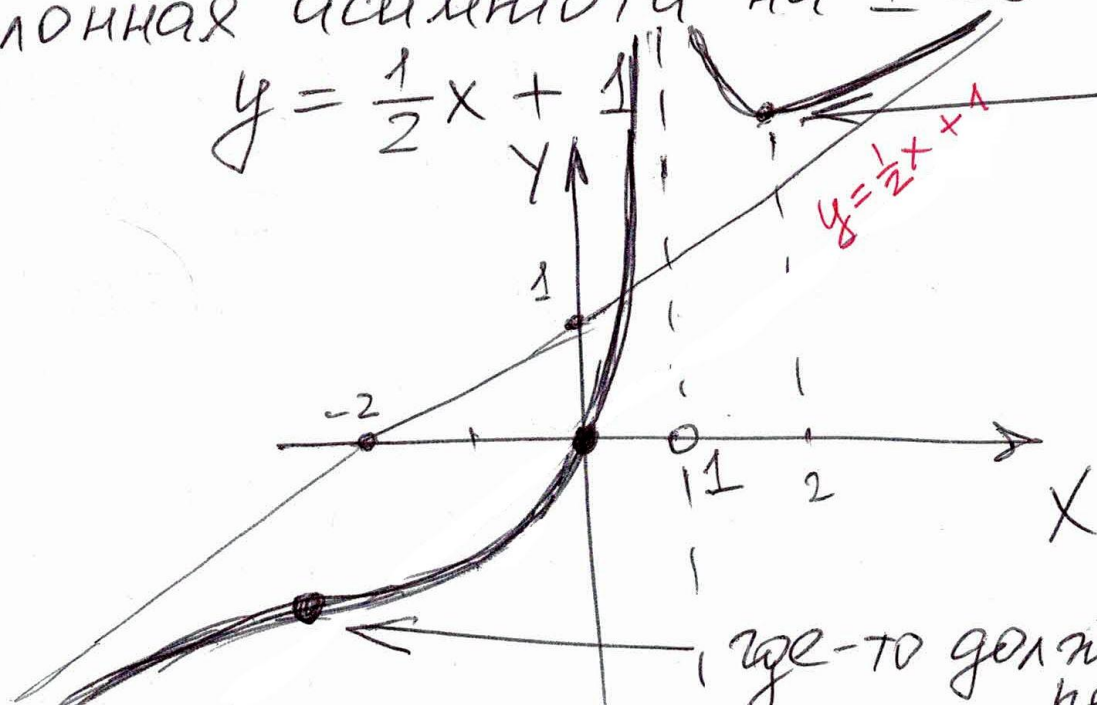
$$b_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2}x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x^3 - (x-1)^2 \cdot x}{(x-1)^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 1$$

⇒ наклонная асимптота на $\pm\infty$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Эскиз:



где-то
есть хотя
бы один
минимум

где-то должен быть
перелом

5.475

$$y = \frac{x^3}{x^3 + 1}$$

1. $x \neq -1, y \in \mathbb{R}$

2. OY: $x=0 \Rightarrow y=0$

OX: $y=0 \Leftrightarrow x=0$

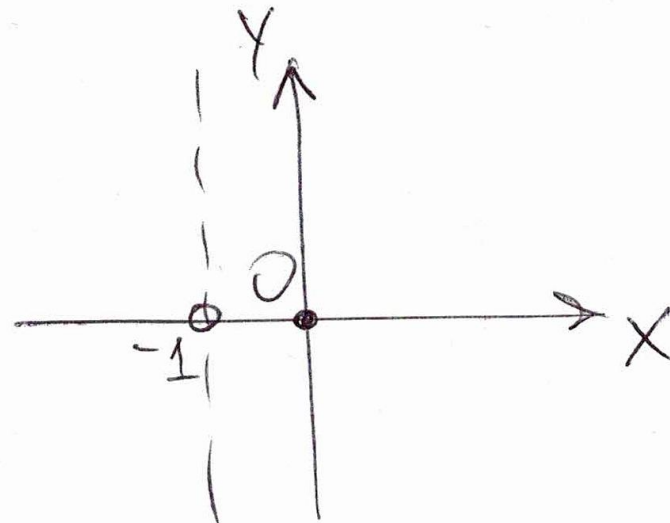
3. $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^3 + 1} = -\frac{x^3}{-x^3 + 1} \neq y(x) \neq -y(-x)$

4. Поведение на концах ООФ:

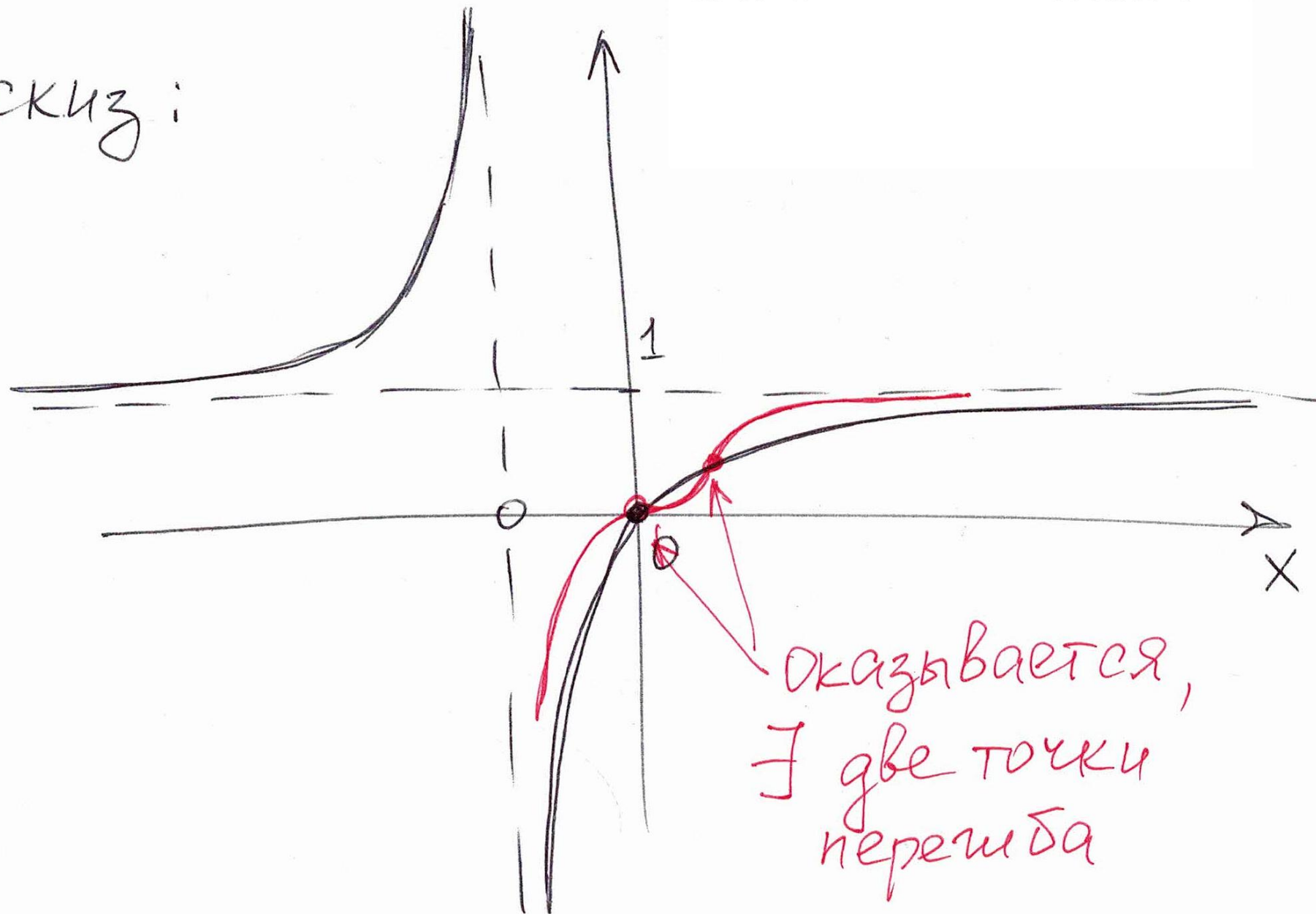
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 + 1} = 1 \Rightarrow \exists \text{ горизонт. асимптота}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{x^3}{x^3 + 1} = \left[\frac{-1}{\pm 0} \right]$$

$y = 1$
 $\Downarrow$
наклонных
асимптот
нет.
 $\Downarrow$
 $\exists$ верт. асимптота
 $x = -1$



5. Эскиз:



5.478.

$$y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

1. $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$

2. $OY: x=0 \Rightarrow y=2$

$OX: y=0 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[3]{(x+1)^2}}_{\text{неотр.}} = -\underbrace{\sqrt[3]{(x-1)^2}}_{\text{неполож.}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{(x+1)^2} = 0 \\ \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\begin{aligned} 3. y(-x) &= \sqrt[3]{(-x+1)^2} + \sqrt[3]{(-x-1)^2} = \\ &= \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2} = y(x) \\ &\Rightarrow \text{ф-ция четная.} \end{aligned}$$

4. Поведение на концах области определения:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} \right) = +\infty$$

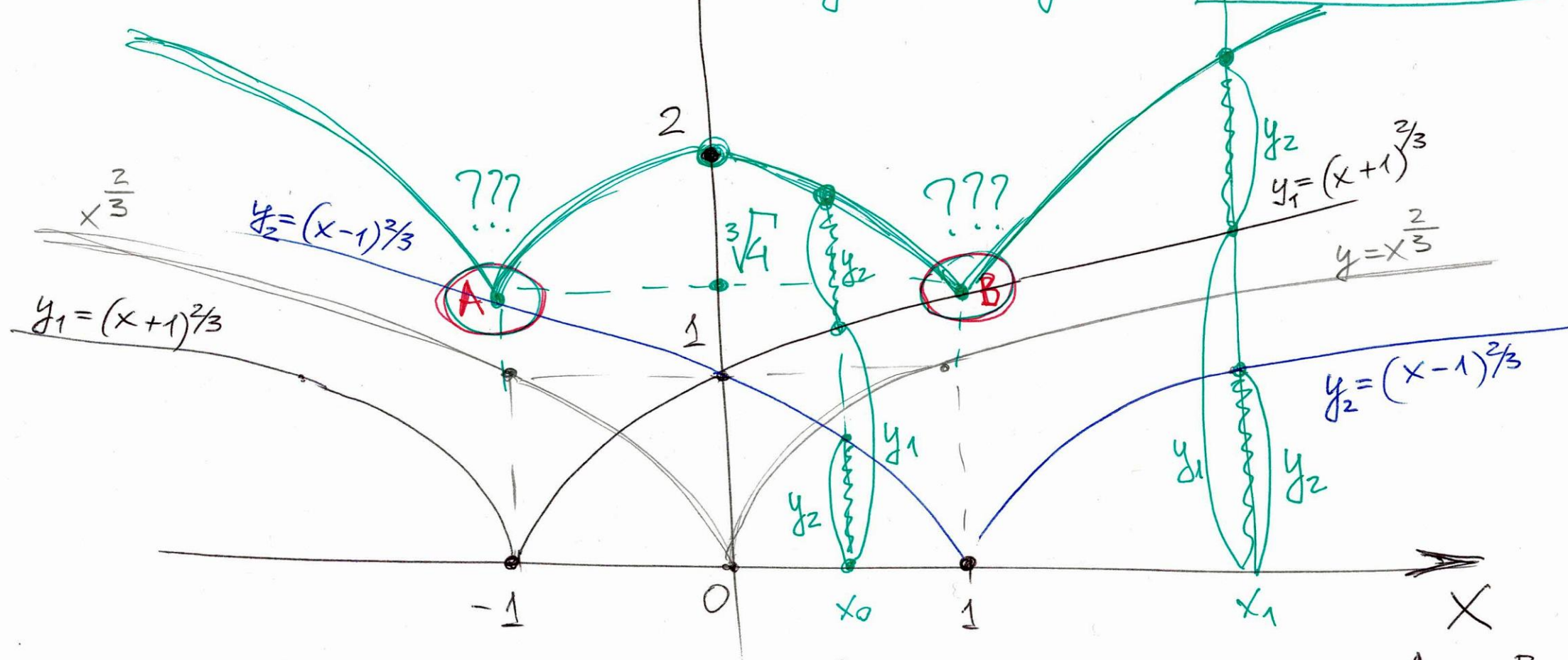
5. Наклонная асимптота есть?

$$k_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^{2/3}}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ никаких асимптот нет.

построим этот график с помощью сложения линий:

$$y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = y_1 + y_2 \quad \boxed{y = y_1 + y_2}$$



Как ведет себя график в окрестностях точек A и B, ответить без вычисления первой производной НЕЛЬЗЯ!!! строго

5.489

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2}}{x}$$

①

1. $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$

2. $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2 = 0$

$$x = -\sqrt[3]{2}$$

3. $y(-x) = \frac{\sqrt[3]{-x^3 + 2}}{-x} = \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2}}{x} \neq y(x)$
 $\neq -y(x)$

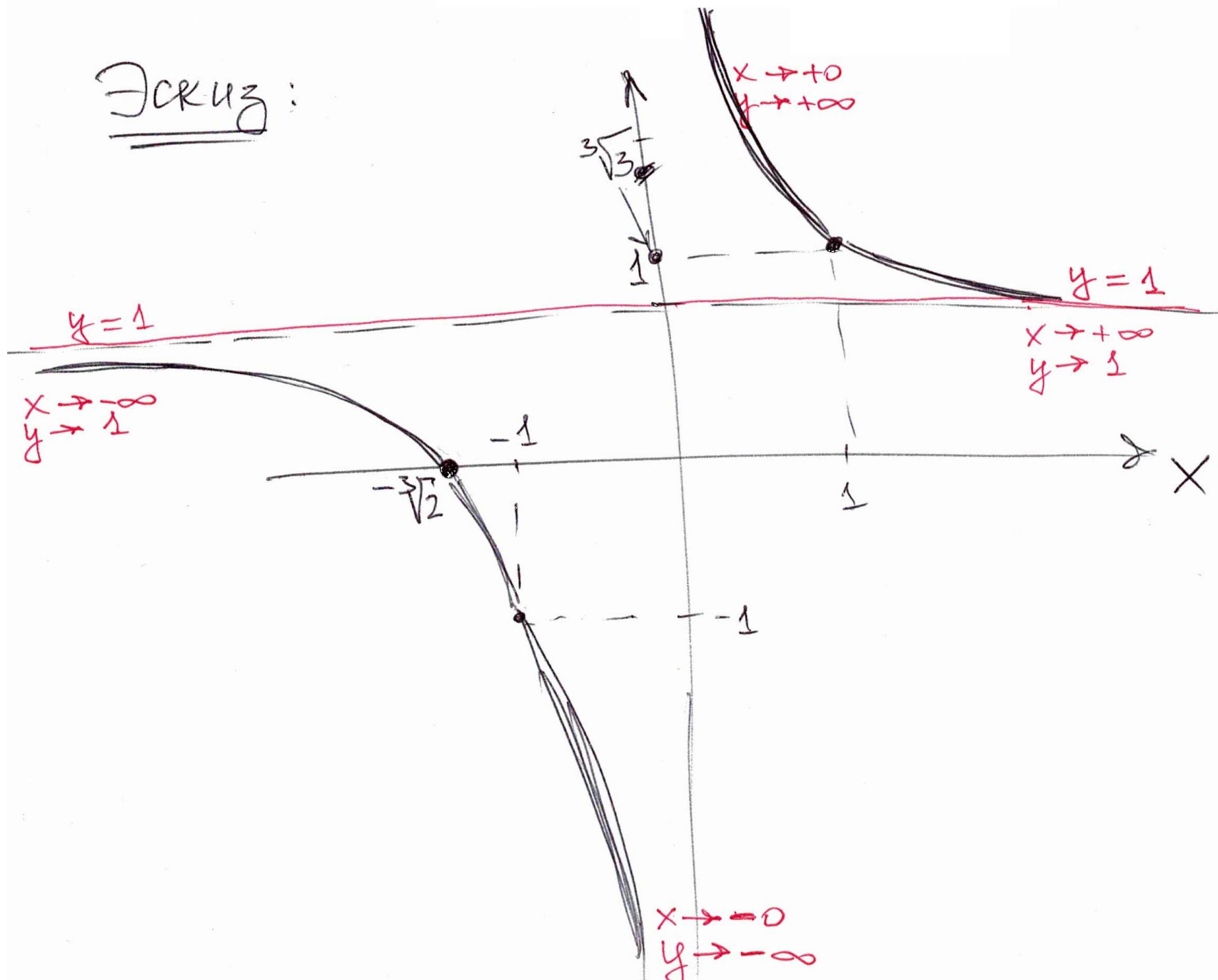
$\Rightarrow$ ф-ция общего вида

4. а) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2}}{x} = 1 \Rightarrow \exists$ горизонтальная асимптота $y = 1$

б) $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2}}{x} = \left[\frac{\sqrt[3]{2}}{\pm 0} \right] = \pm\infty$

$\Rightarrow \exists$ вертикальная асимптота $x = 0$

Эскюз:



5.489 (II) $y' = \left(\frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x} \right)' = ?$

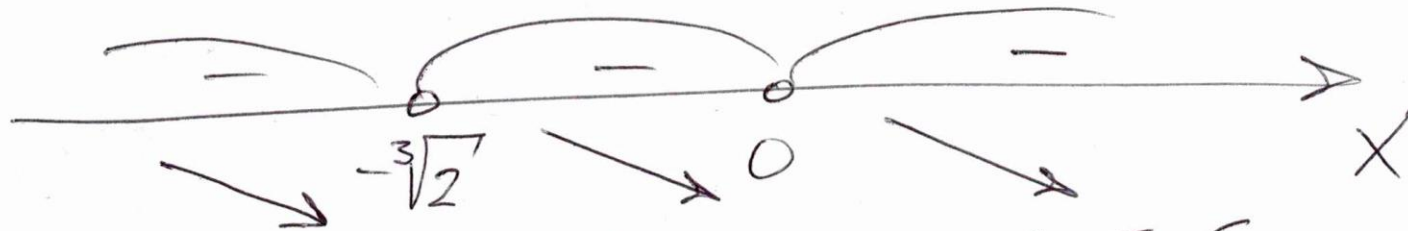
$$\ln y = \frac{1}{3} \ln |x^3+2| - \ln |x|$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}(x^3+2)} - \frac{1}{x} = \frac{x^3 - (x^3+2)}{x(x^3+2)} =$$

$$= \frac{-2}{x(x^3+2)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x} \cdot \left(\frac{-2}{x(x^3+2)} \right) = \frac{-2}{x^2 \cdot (x^3+2)^{2/3}}$$

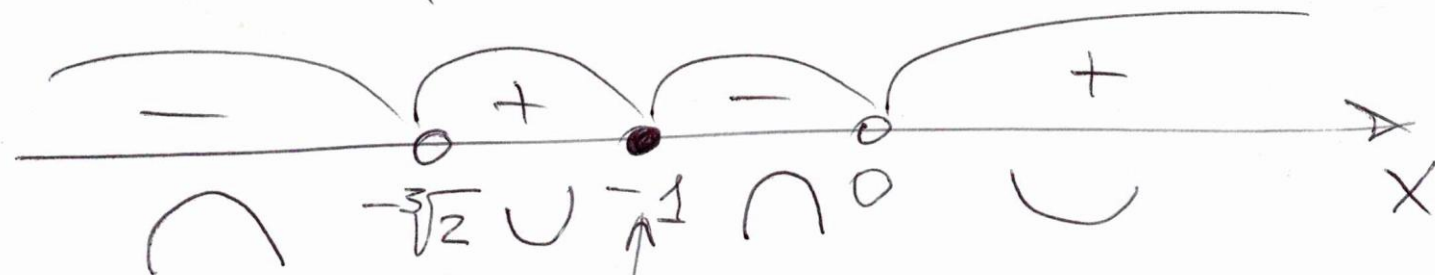
$$\Rightarrow \text{особые точки: } x=0 \text{ и } x=-\sqrt[3]{2}$$



$\Rightarrow y = f(x)$ убывает на всей обл-ти определения.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{\text{III}} \quad y'' &= -2 \cdot \left(x^{-2} \cdot (x^3+2)^{-2/3} \right)' = \\
 &= -2 \cdot \left(-2x^{-3} \cdot (x^3+2)^{-2/3} + x^{-2} \cdot \left(-\frac{2 \cdot 3x^2}{3(x^3+2)^{5/3}} \right) \right) = \\
 &= 4 \left(\frac{1}{x^3(x^3+2)^{2/3}} + \frac{1}{(x^3+2)^{5/3}} \right) = \\
 &= \frac{4}{(x^3+2)^{5/3}} \left(\frac{x^3+2}{x^3} + 1 \right) = \frac{8(x^3+1)}{(x^3+2)^{5/3} \cdot x^3}
 \end{aligned}$$

$$y'' = \frac{8(x^3+1)}{x^3(x^3+2)^{5/3}}$$



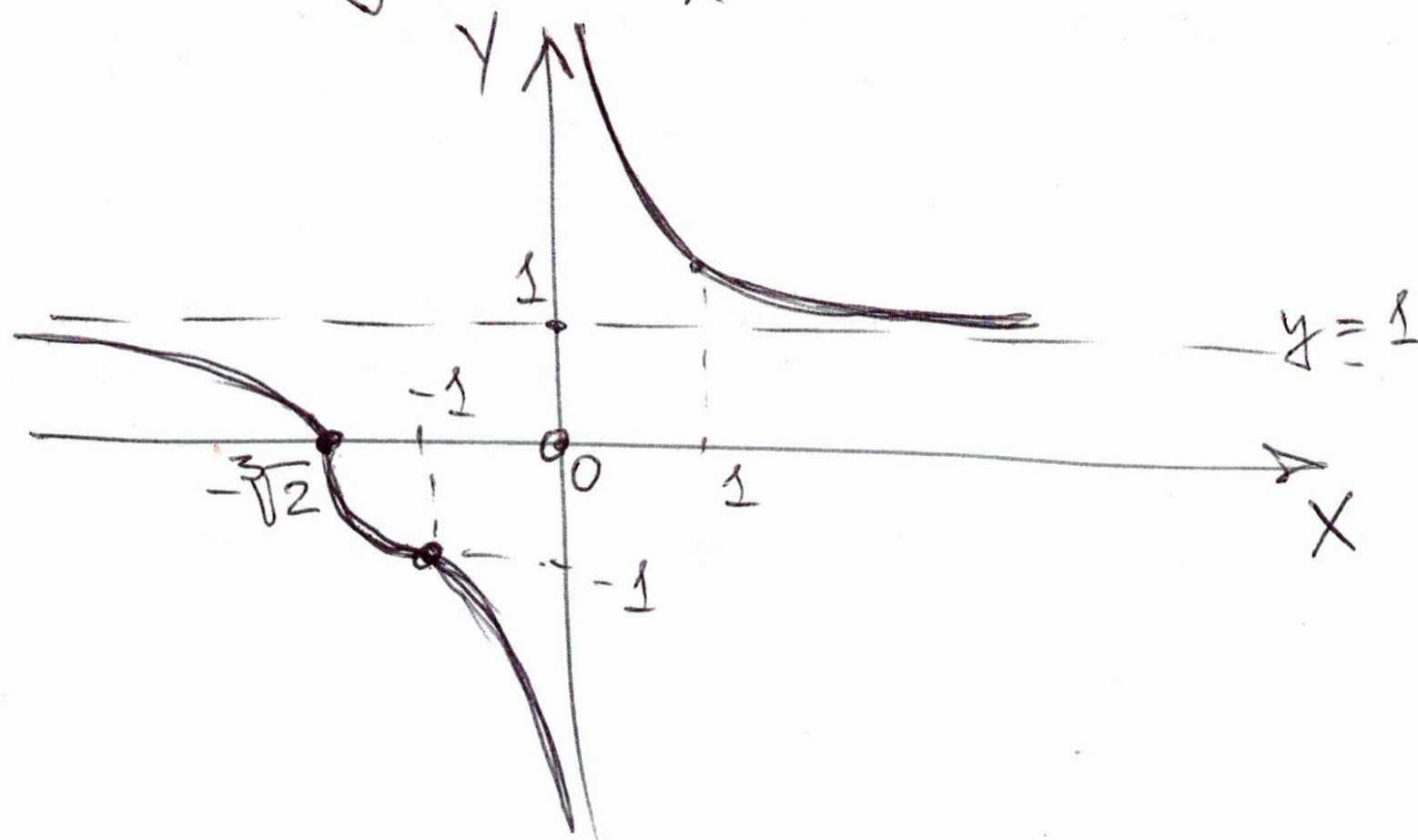
$$y(-\sqrt[3]{2}) = 0$$

$$y(-1) = -1$$

точки перегиба

Окончательный график:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2}}{x}$$



5.501

$$y = \frac{1}{x} \cdot e^{-1/x}$$

1. $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$

2. OY : нет

OX : $y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x e^{1/x}} = 0 \Leftrightarrow \emptyset$

3. $y(-x) = -\frac{1}{x} \cdot e^{1/x} \neq y(x) \Rightarrow$ ф-ция общего вида
 $\neq -y(x)$

4. Поведение на концах области определения:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x e^{1/x}} = \left[\frac{1}{+\infty} \cdot \frac{1}{e^{1/+\infty}} \right] = +0$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x e^{1/x}} = \left[\frac{1}{-\infty} \cdot \frac{1}{e^{1/-\infty}} \right] = -0$

$\exists$ горизонт. асимптота
 $y = 0$

$$3) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x e^{1/x}} = \left[\frac{1}{+0} \cdot \frac{1}{e^{1/+0}} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] = ???$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-1/x}}{x} \stackrel{\text{p.l.}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-1/x} \cdot (1/x^2)}{1} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{e^{1/x}} \stackrel{\text{p.l.}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{(1/x)'}{e^{1/x} \cdot (1/x)'} = \left[\frac{1}{e^{1/+0}} \right] = +0$$

$\Downarrow$
 $\gamma - \gamma - \gamma \dots$

$$4) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x e^{1/x}} = \left[\frac{1}{-0} \cdot \frac{1}{e^{1/-0}} \right] = \left[\frac{1}{-0} \right] = -\infty$$

Задание:

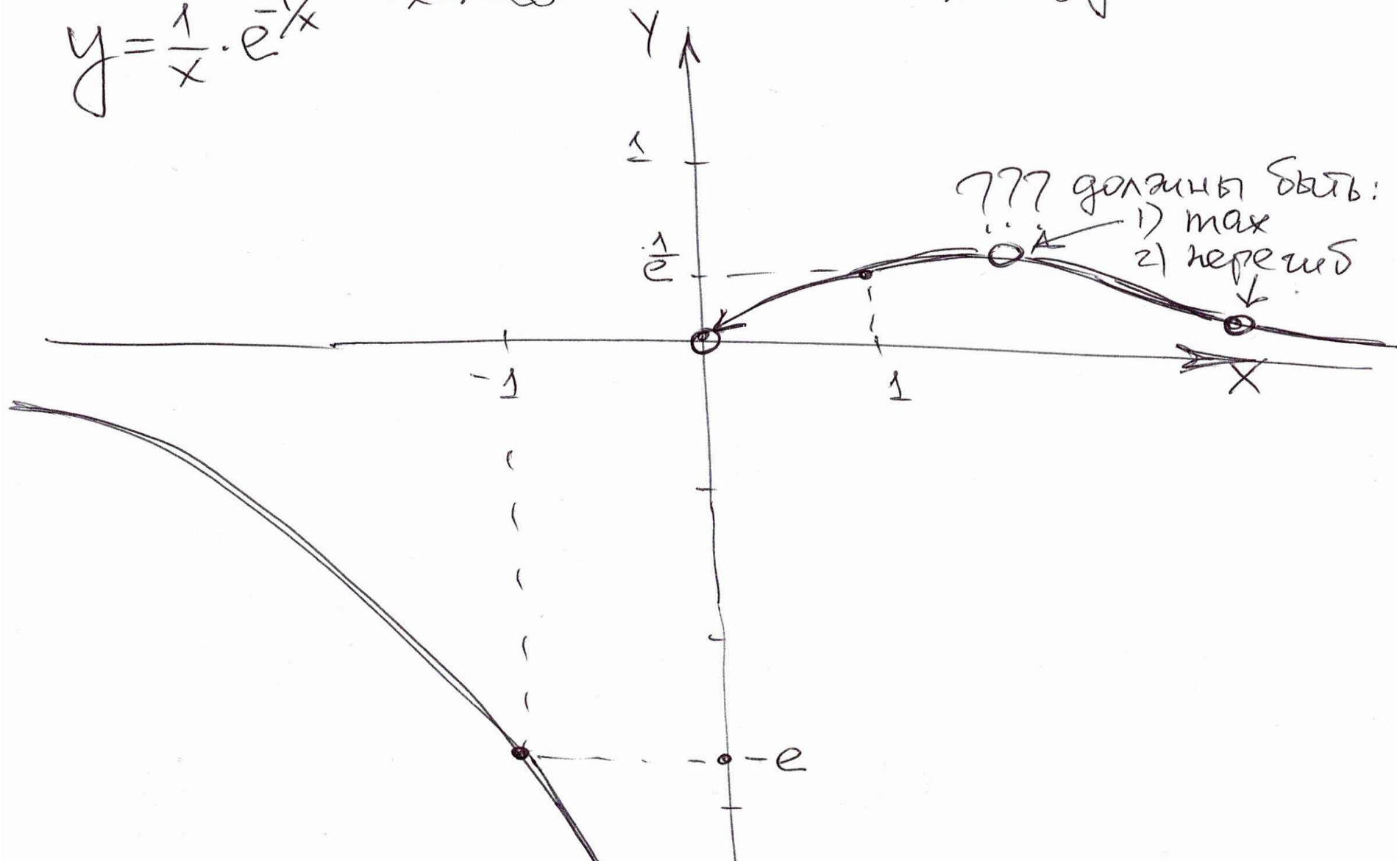
1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +0$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -0$

3) $\lim_{x \rightarrow +0} y = +0$

4) $\lim_{x \rightarrow -0} y = -\infty$

$y = \frac{1}{x} \cdot e^{-1/x}$



5.508

$$y = x^2 \cdot e^{2/x}$$

1. $x \neq 0$; $y > 0$

2. OY : нет ; OX : $y = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot e^{2/x} = 0$

3. $y(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-2/x} = x^2 \cdot e^{-2/x} \neq y(x)$
 $\neq -y(x)$ $\emptyset$ на $\infty\varnothing$.

4. Поведение на концах $\infty\varnothing$:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{2/x} = \left[+\infty \cdot \left(e^{\frac{2}{+\infty} + 0} \right) \right] = +\infty$
 $\nearrow +1$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^{2/x} = \left[(-\infty)^2 \cdot \left(e^{\frac{2}{-\infty}} \right) \right] = +\infty$
 $\nearrow +1$

$$3) \lim_{x \rightarrow +0} x^2 \cdot e^{2/x} = \left[+0 \cdot \underbrace{e^{+\infty}}_{+\infty} \right] = ???$$

$$\parallel \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{e^{2/x}} \stackrel{\text{n.l.p.}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2x}{e^{-2/x} \cdot 2/x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^3}{e^{-2/x}}$$

$\Downarrow$
 $\gamma - \gamma - \gamma !!!$

$$\parallel \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{2/x}}{x^{-2}} \stackrel{\text{n.l.p.}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{2/x} \cdot (-2/x^2)}{-2 \cdot x^{-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} x \cdot e^{2/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{2/x}}{1/x} \stackrel{\text{n.l.p.}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\overset{+\infty}{e^{2/x}} \cdot 2 \cdot (1/x)'}{(1/x)'} =$$

$$= 2 \cdot +\infty = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -0} x^2 \cdot e^{2/x} = \left[+0 \cdot \underbrace{e^{\frac{2}{-0} \rightarrow -\infty}}_{\downarrow +0} \right] = +0$$

5. Наклонные асимптоты

$$k_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot e^{2/x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{2/x}}{1/x} \stackrel{\text{н.л.}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\overbrace{e^{2/x} \rightarrow 1}^{\nearrow 1} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = 2$$

$$b_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 e^{2/x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\underbrace{x e^{\frac{2}{x} \rightarrow 0}}_{\rightarrow 0} - 2 \right) = +\infty \Rightarrow \text{нет асимптот}$$

Эскиз: $y = x^2 \cdot e^{2/x}$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

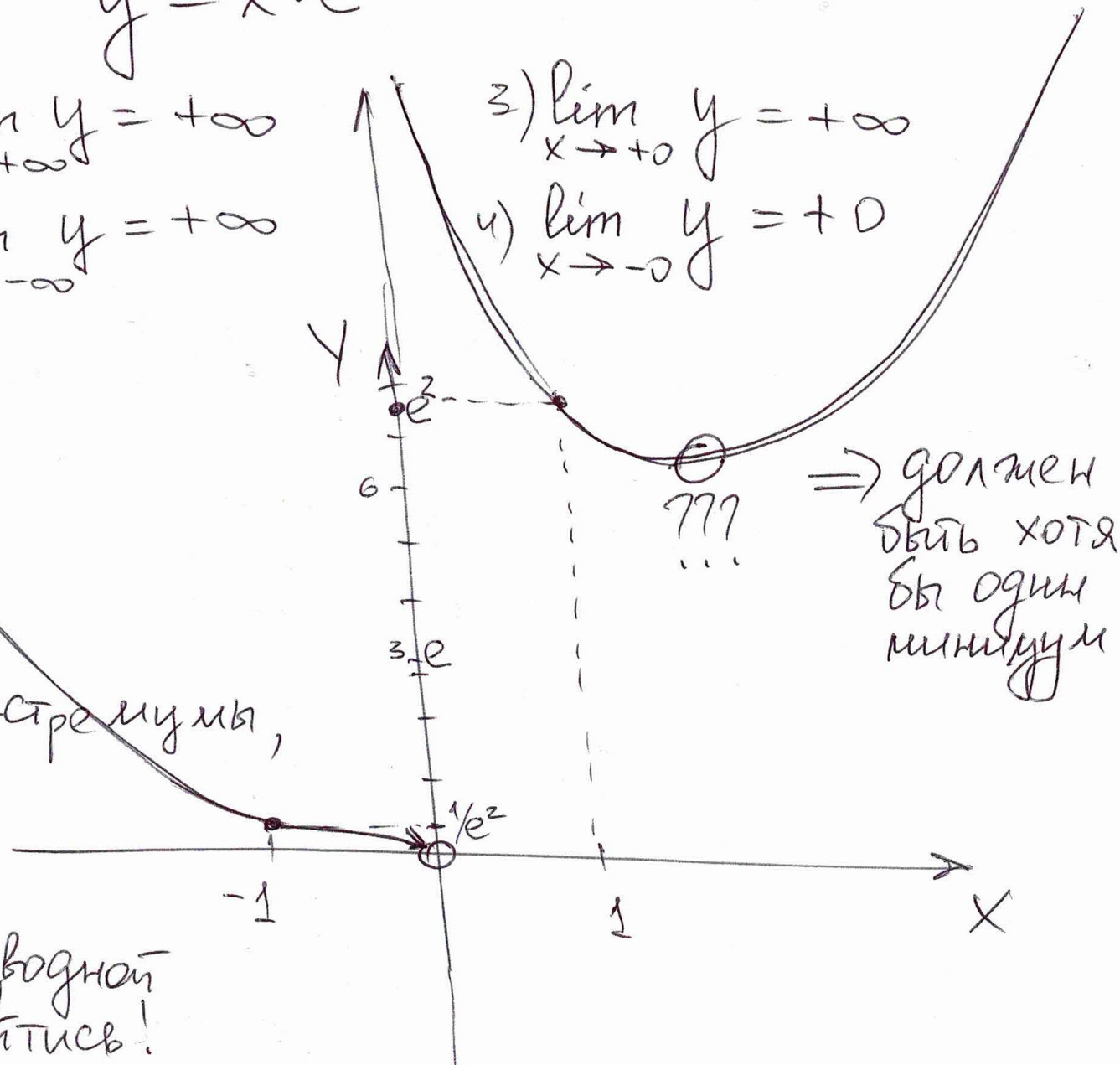
2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow -0} y = +0$

Могут
быть и экстремумы,
и точки
пересб

↓
без производной
не обойтись!



5.513. $y = x^2 \cdot \ln x$

1. $x > 0$; $y \in \mathbb{R}$

2. OY : нет; $Ox: y=0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \ln x = 0$

$$\ln x = 0$$
$$x = 1$$

3. Функция общего вида

4. Поведение на концах ООФ:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \ln x = [+ \infty \cdot + \infty] = + \infty$

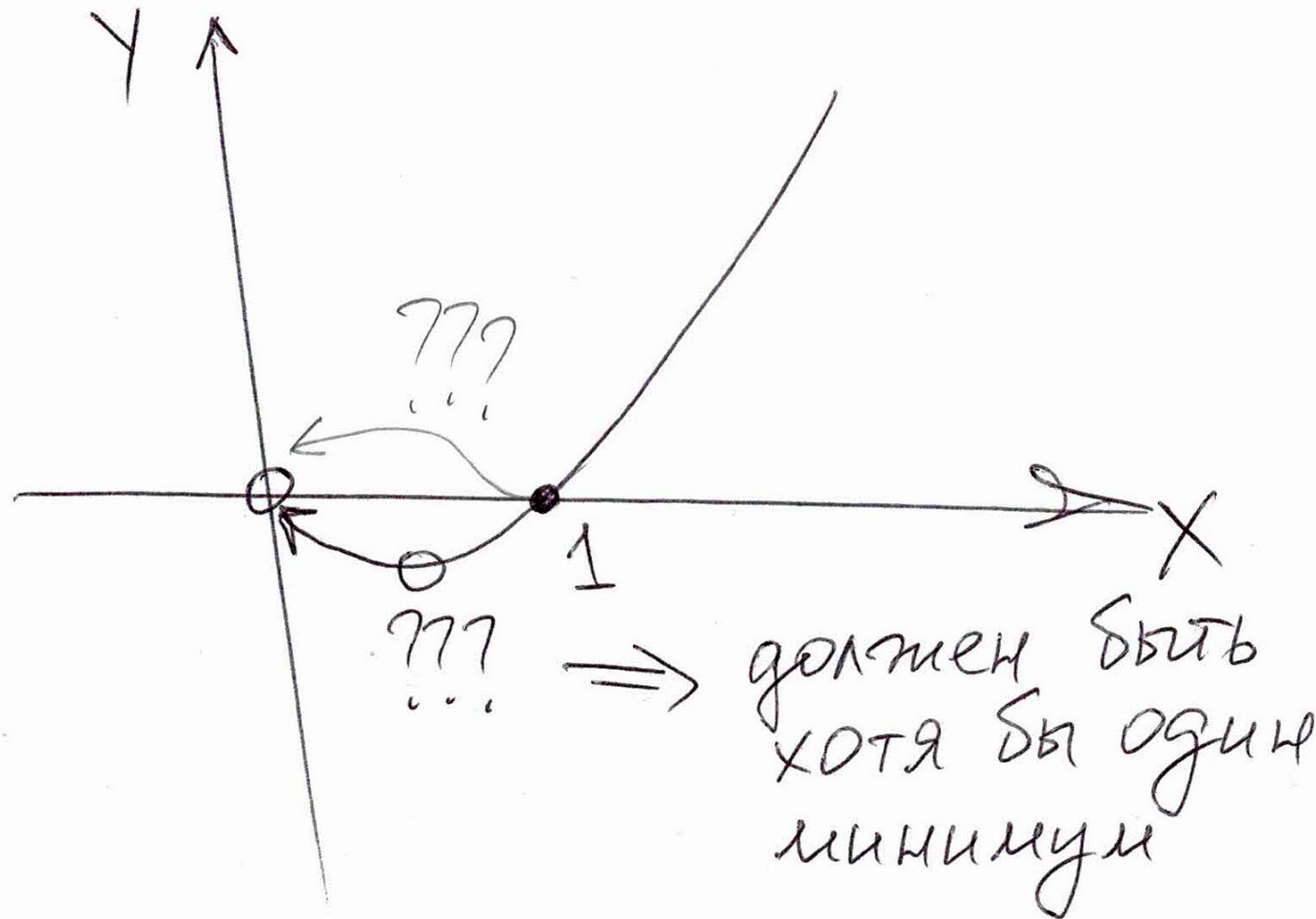
2) $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \cdot \ln x = [+0 \cdot (-\infty)] = ???$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 \ln x}{x^{-2}} \stackrel{\text{п.л.}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-2 \cdot x^{-3}} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{2} = -0$$

5. Наклонная асимптота на $+\infty$;

$$P_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot P_{n,x} = +\infty \Rightarrow \text{нет асимптоты}$$

Эскиз:



5.514.

$$y = \frac{\ln x}{x^2}$$

1. $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

2. OY : нет; Ox : $y = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

3. Функция общего вида.

4. Поведение на концах ООФ:

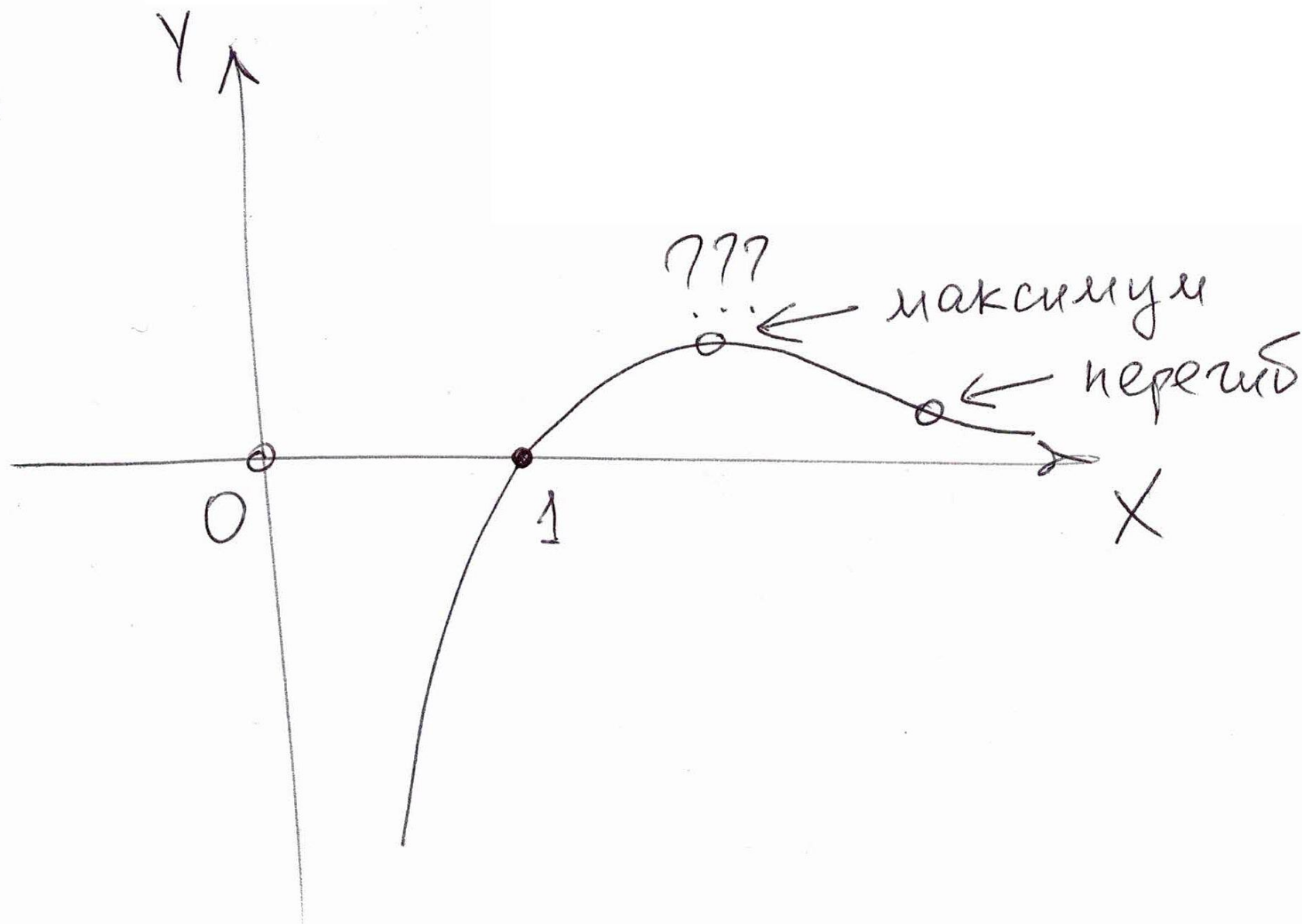
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty} \right] \stackrel{\text{П.Л.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^2} = \left[\frac{-\infty}{+0} \right] = \left[-\infty \cdot \frac{1}{+0} \right] = -\infty$$

$\downarrow +\infty$

$= +0$

Эскиз:



5.524

$$y = x^{1/x}$$

(I)

$$1. x > 0$$

$$y > 0$$

2. Нет точек пересечения
с осями координат

3. Функция общего вида

4. Поведение на концах ООФ:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = [(+\infty)^{1/+\infty}] = 1 \Rightarrow$$

на $+\infty$
 $\exists$ горизонт.
асимптота
 $y=1$

$$2) \lim_{x \rightarrow +0} x^{1/x} = [(+0)^{1/+0}] = [(+0)^{+\infty}] = ??? \neq$$

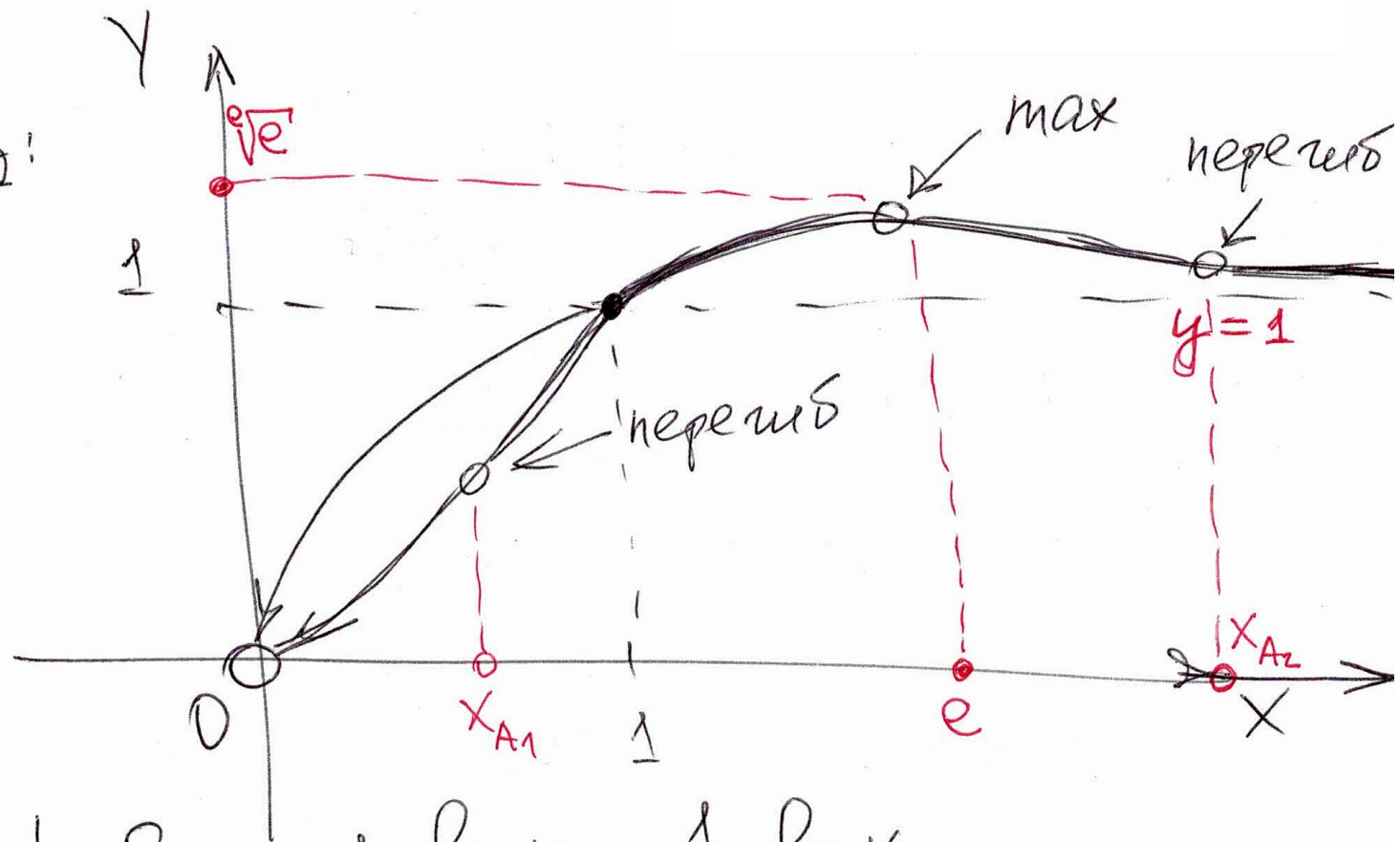
$$\text{Рассм. } \ln A = \lim_{x \rightarrow +0} \ln(x^{1/x}) = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right)$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad -\infty$

$$\Rightarrow \ln A = -\infty$$

$$A = e^{-\infty} = +0$$

Эскиз:



II

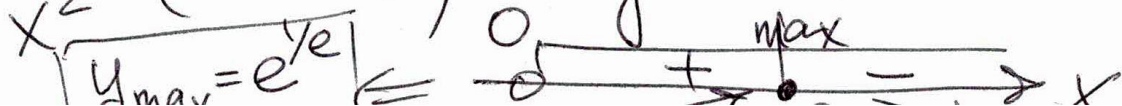
$$y' = ?$$

$$1. \ln y = \frac{1}{x} \ln x$$

$$2. \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x)$$

$$\Rightarrow y' = x^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = e$$



$$\textcircled{\text{III}} \quad y'' = \left(x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1 - \ln x) \right)' \quad (uv)' = u'v + v'u$$

$$= \left(x^{\frac{1}{x}-2} \right)' \cdot (1 - \ln x) + x^{\frac{1}{x}-2} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \quad \textcircled{\star}$$

$$\textcircled{\star}: y_1 = x^{\frac{1}{x}-2}$$

$$1. \ln y_1 = \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \cdot \ln x$$

$$2. \frac{y_1'}{y_1} = \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \ln x + \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2} (1 - \ln x - 2x)$$

$$\Rightarrow y_1' = x^{\frac{1}{x}-2} \cdot x^{-2} \cdot (1 - \ln x - 2x) =$$

$$= x^{\frac{1}{x}-4} (1 - 2x - \ln x)$$

$$\boxed{1 - \ln x = \ln \frac{e}{x} = \ln e - \ln x''}$$

$$\textcircled{\star} \quad x^{\frac{1}{x}-4} \left(\underbrace{1-2x-\ln x}_{-2x-\ln \frac{x}{e}} \cdot \underbrace{(1-\ln x)}_{-\ln \frac{x}{e}} \right) - x^{\frac{1}{x}-3} =$$

$$= + x^{\frac{1}{x}-4} \left(\ln \frac{x}{e} + 2x \right) \cdot \left(-\ln \frac{x}{e} \right) - x^{\frac{1}{x}-4+1} =$$

$$= x^{\frac{1}{x}-4} \left(\ln^2 \frac{x}{e} + 2x \cdot \ln \frac{x}{e} - x \right) = 0$$

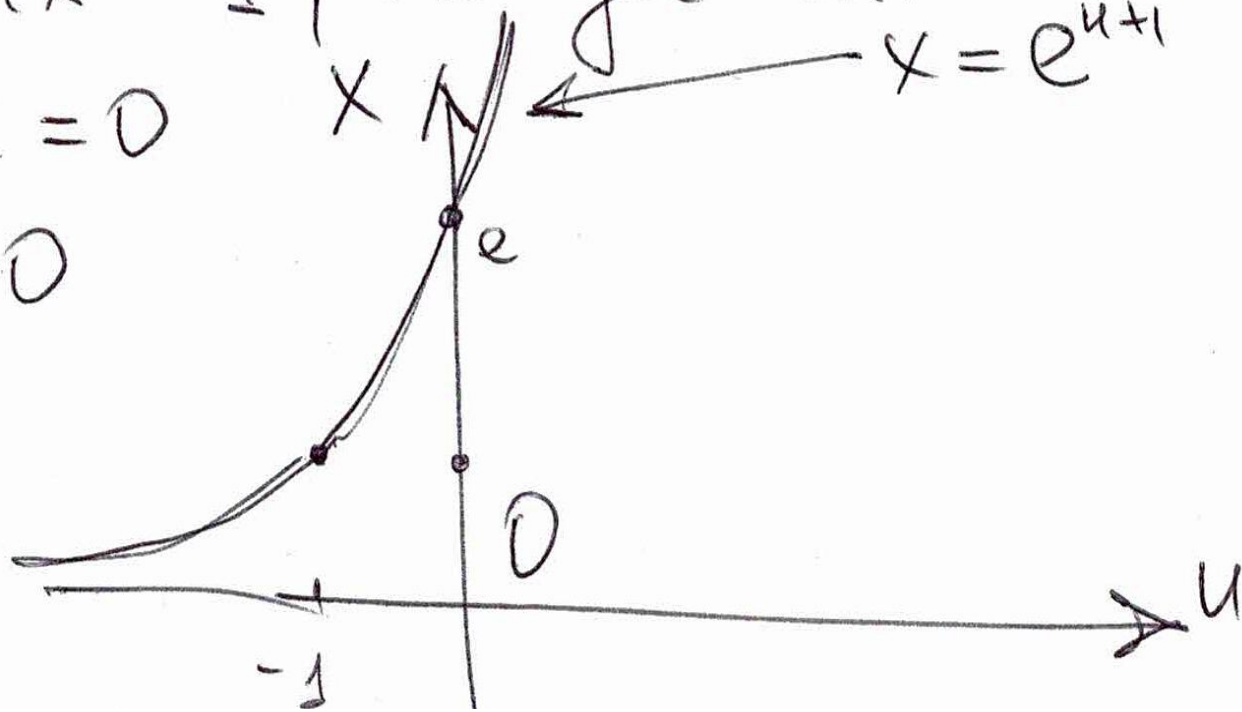
$$\Leftrightarrow \boxed{\ln^2 \frac{x}{e} + 2x \cdot \ln \frac{x}{e} - x = 0} \quad (*)$$

Обозначим $u = \ln x - 1$, тогда $\ln x = u + 1$
 $x = e^{u+1}$

$$(*) : u^2 + 2x \cdot u - x = 0$$

$$u^2 + x(2u - 1) = 0$$

$$x = \frac{u^2}{1 - 2u}$$

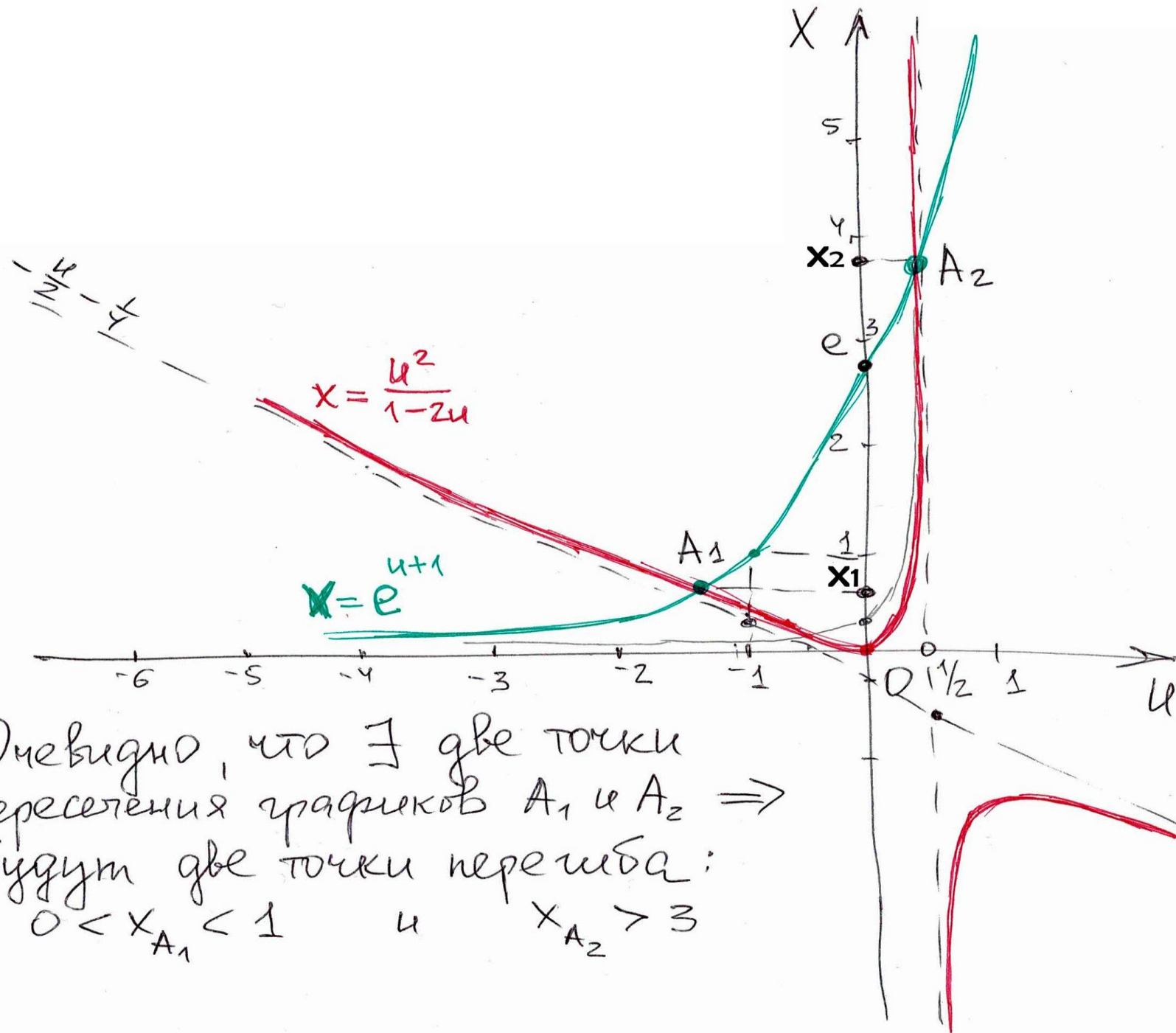


Для решения (*) в системе координат UOX построим графики $x_1 = e^{u+1}$ и

$$x_2 = \frac{u^2}{1-2u} = (\text{после деления "столбиком"})$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\right)}_{\text{прямая}} + \underbrace{\frac{1}{4(1-2u)}}_{\text{гипербола}}$$

и найдем их точки пересечения в верхней полуплоскости $x > 0$:



Очевидно, что $\exists$ две точки
пересечения графиков A_1 и $A_2 \Rightarrow$
будут две точки перегиба:
 $0 < X_{A_1} < 1$ и $X_{A_2} > 3$