ПРОИЗВОДНАЯ

Домашняя работа

1.301. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 7x + 4} - 2x \right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 - 7x + 4} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2 - 7x + 4} + 2x\right)}{\sqrt{4x^2 - 7x + 4} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{4x^2} - 7x + 4 - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2} + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-7x}{|2x| + 2x}$$

$$= -\frac{7}{4}$$

1.305. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \operatorname{ctg} \pi x = [0 \cdot \infty] =$

$= \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \frac{\cancel{\cos \pi x} \to 1}{\sin \pi x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin \pi x} = \frac{1}{\pi}$

5.56 $y = x^2 \cdot e^{-2x}$

$y' = 2x \cdot e^{-2x} + x^2 \cdot e^{-2x} \cdot (-2) =$

$= 2xe^{-2x}(1 - x)$

5.329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\overset{\text{п.Л.}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\overset{0}{\sin 2x}}{\underset{1}{\cos 2x}\cdot 2\underset{1}{\cos 2x}}=0$

5.330. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\overset{\text{п.Л.}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2+1}}{3x^2}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{3x^2}(x^2+1)}=\dfrac{1}{3}$

5.82. $$y=\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}} \qquad y'=?$$

1. $$\ln y=\frac{1}{3}\left(\ln|x+2|+2\ln|x-1|-5\ln|x|\right)$$

2. $$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x}\right)=$$

$$=\frac{x^2-x+2x(x+2)-5(x+2)(x-1)}{3x(x+2)(x-1)}$$

$$=\frac{-2x^2-2x+10}{3x(x+2)(x-1)}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2+x-5}{x(x+2)(x-}$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}\cdot\frac{x^2+x-5}{x(x+2)(x-1)}=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2+x-5}{x^{8/3}(x+2)^{2/3}(x-1)^{1/3}}$$

5.87. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}}$ $\qquad y' = ?$

1. $\ln y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} \cdot \ln x = \frac{1}{2}\left(x^{1/3} \cdot \ln x\right)$

2. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \ln x + \cancel{x}^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x}\right) =$

$= \frac{1}{6}\left(\frac{\ln x + 3}{x^{2/3}}\right)$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{6} \cdot x^{\frac{1}{2}\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3}}\left(\ln x + 3\right)$

5.91

$$y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \qquad y' = ?$$

1. $\ln y = \ln\left((\ln x)^x\right) - \ln\left(x^{\ln x}\right) =$

$= x \cdot \ln\ln x - (\ln x)^2$

2. $\frac{y'}{y} = \left(\ln\ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) - 2(\ln x) \cdot \frac{1}{x} =$

$= \ln\ln x + \frac{1}{\ln x} - \frac{2\ln x}{x}$

$$\Rightarrow y' = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \cdot \left(\ln\ln x + \frac{1}{\ln x} - \frac{2\ln x}{x}\right)$$

5.92 $\quad y = x^{x^2} + x^{2^x} + 2^{x^x} \qquad y' = ?$

$a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq (a^b)^c = a^{b \cdot c}$

$a \quad b^c \neq bc$

$$y' = (y_1)' + (y_2)' + (y_3')$$

1) $y_1 = x^{x^2} \Rightarrow$ 1. $\ln y_1 = x^2 \ln x$

2. $\dfrac{y_1'}{y_1} = 2x \cdot \ln x + x$

$\Rightarrow y_1' = x^{x^2} \cdot x\,(2\ln x + 1)$

2) $y_2 = x^{2^x} \Rightarrow$ 1. $\ln y_2 = 2^x \cdot \ln x$

2. $\dfrac{y_2'}{y_2} = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \ln x + 2^x \cdot \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow y_2' = x^{2^x} \cdot \dfrac{2^x}{x}\,(x \ln 2 \ln x + \cdot$

3) $y_3 = 2^{x^x} \Rightarrow y_3' = 2^{x^x} \cdot \ln 2 \cdot (x^x)' = 2^{x^x} \cdot x^x \cdot \ln 2 \cdot (\ln$

$y = 2^t \Rightarrow y_t' = 2^t \cdot \ln 2$

$(x^x)' = x^x \cdot (\ln x + 1)$

БНЛ?

5.93 $$y=\ln\left(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right)$$

Пусть $\cos^2 x = t$, тогда

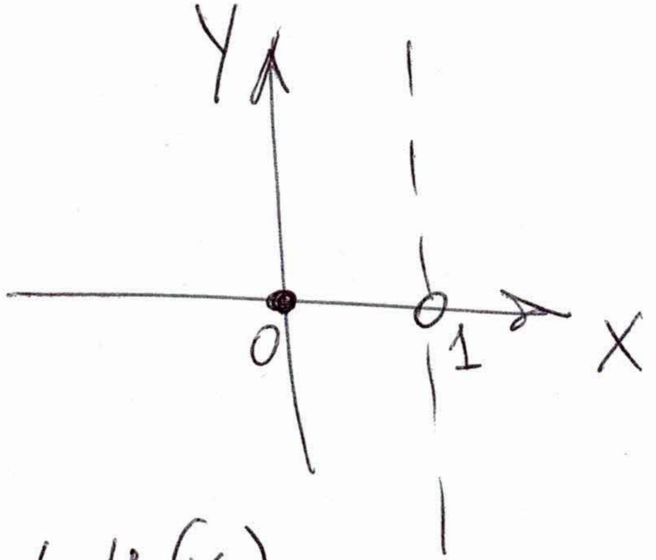
$$t' = 2\cos x\cdot(\cos x)' =$$
$$= -2\sin x\cos x =$$
$$= -\sin 2x$$

$$\Rightarrow y' = \left(\ln\left(t+\sqrt{1+t}\right)\right)'_t\cdot t' =$$

$$= \frac{1}{t+\sqrt{1+t}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+t}}\right)\cdot t' =$$

$$= \frac{-\sin 2x}{\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^2 x}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}\right)$$

<u>5.464</u> $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$



1. $x\neq 1 \quad y\in\mathbb{R}$

2. $OY:\ x=0 \Rightarrow y=0$

   $OX:\ y=0 \Leftrightarrow x=0$

3. $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{2(-x-1)^2}=-\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}\neq y(x)$

   $\neq -y(x)$

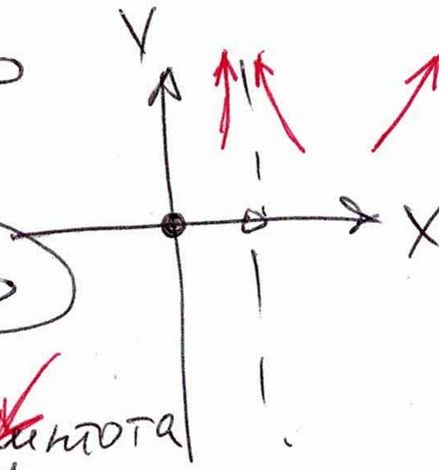
4. Поведение на концах ООФ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=\left[\frac{1}{2\cdot(+0)}\right]=+\infty$$

$\Downarrow$

$\exists$ верт. асимптота $x=1$



5. Наклонная асимптота:

$$k_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{2(x-1)^2 \cdot x} = \frac{1}{2}$$

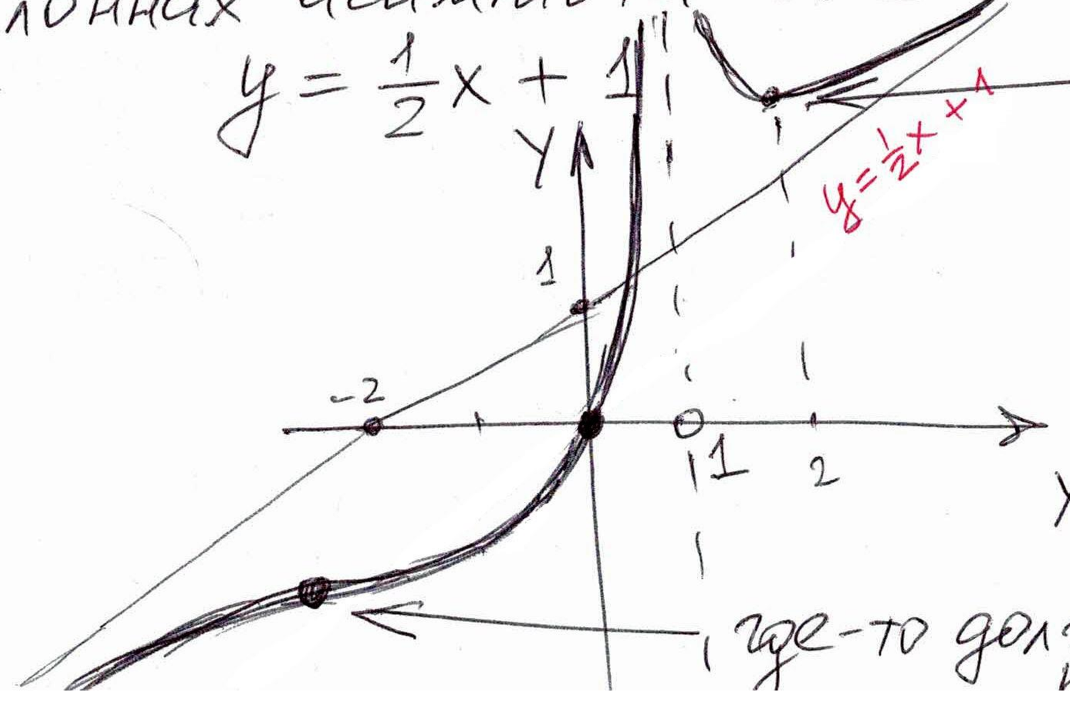
$$b_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2}x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{x^3 - (x-1)^2 \cdot x}{(x-1)^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 1$$

$\Rightarrow$ наклонная асимптота на $\pm\infty$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Эскиз:

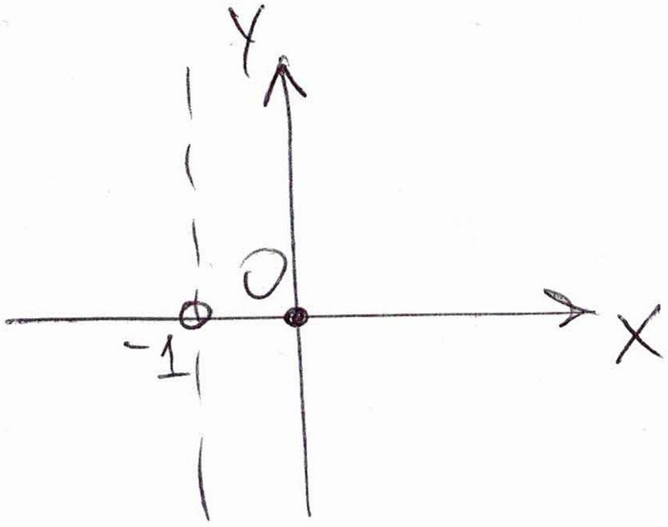


где-то есть хотя бы один минимум

где-то должен быть перегиб

5.475

$$y = \frac{x^3}{x^3+1}$$



1. $x \neq -1, \quad y \in R$

2. $OY: x = 0 \Rightarrow y = 0$

$OX: y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3. $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^3+1} = -\frac{x^3}{-x^3+1} \neq y(x)$
$\neq -y(-x)$

4. Поведение на концах ООФ:

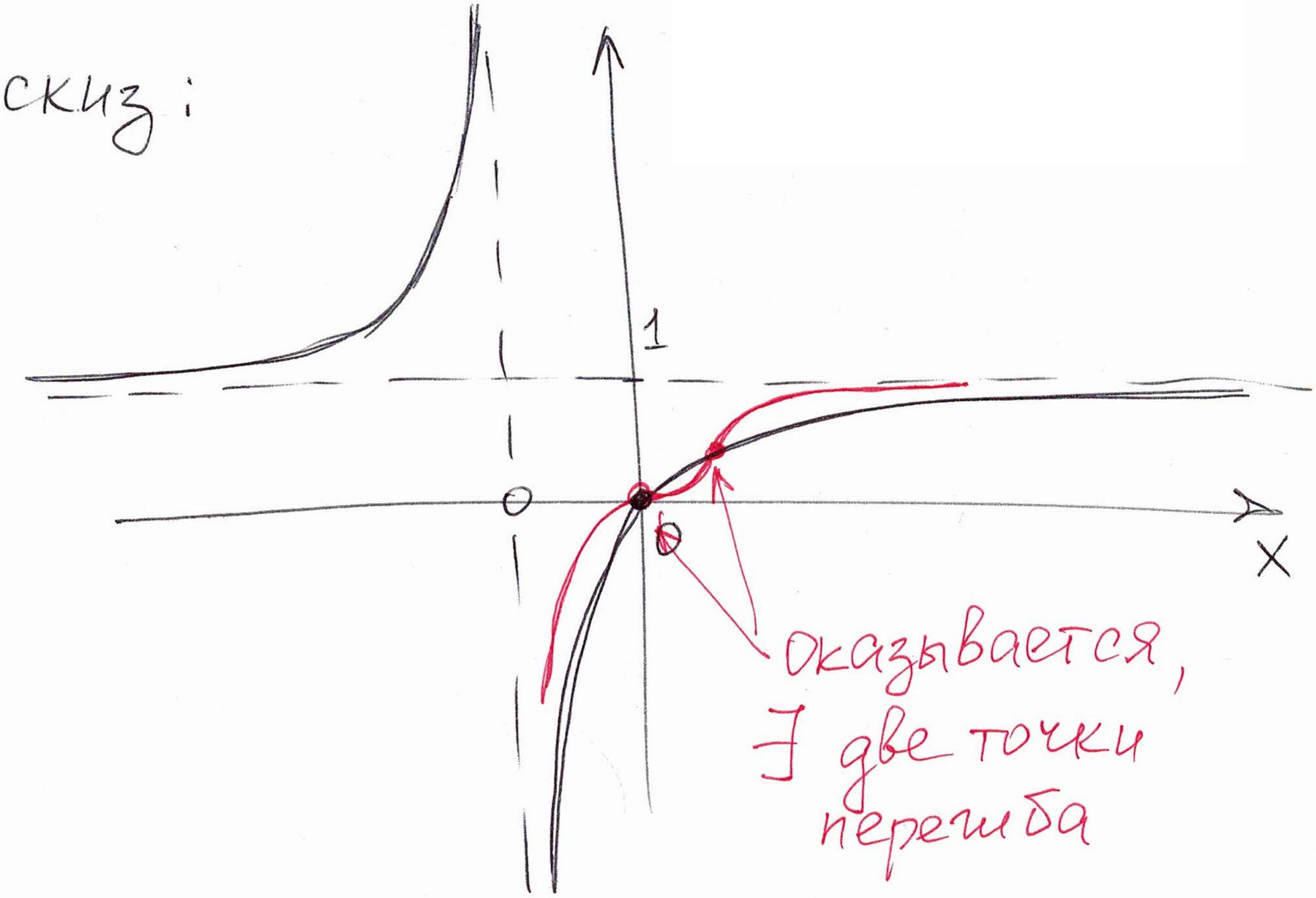
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3+1} = 1 \Rightarrow \exists$ горизонт. асимптота $y = 1$ $\Downarrow$ наклонных асимптот нет.

$\lim\limits_{x \to -1\pm 0} \frac{x^3}{x^3+1} = \left[\frac{-1}{\pm 0}\right] = \mp\infty$

$\Downarrow$

$\exists$ верт. асимптота $x = -1$

5. Эскиз:



5.478.

$$y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

1. $x\in\mathbb{R}$, $y\geqslant 0$

2. $OY:\ x=0 \Rightarrow y=2$

$OX:\ y=0 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[3]{(x+1)^2}}_{\text{неотр.}}=\underbrace{-\sqrt[3]{(x-1)^2}}_{\text{неполож.}}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{(x+1)^2}=0\\ \sqrt[3]{(x-1)^2}=0\end{cases} \quad \begin{cases}x=-1\\ x=1\end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

3. $y(-x)=\sqrt[3]{(-x+1)^2}+\sqrt[3]{(-x-1)^2}=$

$=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^2}=y(x)$

$\Rightarrow$ ф-ция четная.

4. Поведение на концах области определения:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} \right) = +\infty$$

5. Наклонная асимптота есть?

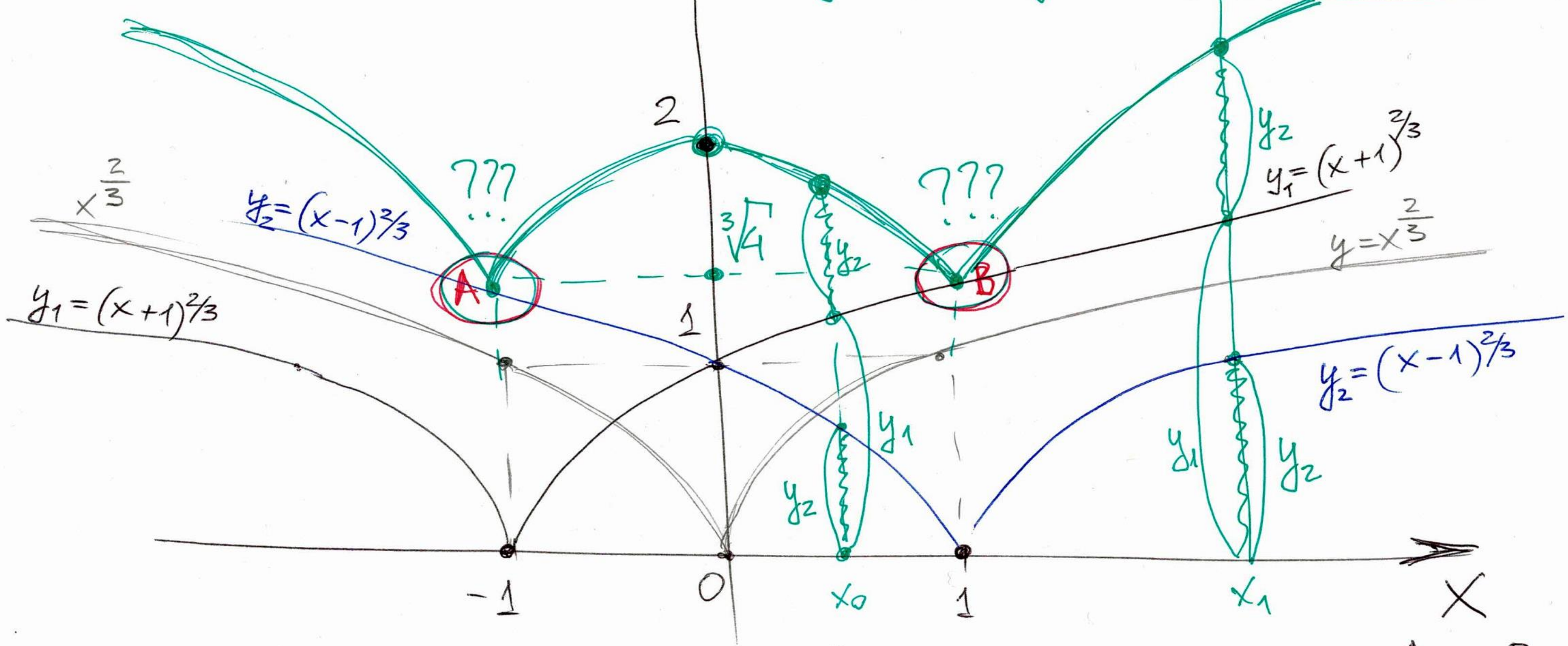
$$k_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^{2/3}}{x} = 0$$

$\Rightarrow$ никаких асимптот нет.

построим этот график с помощью сложения линий:

$$y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = \underbrace{(x+1)^{2/3}}_{y_1} + \underbrace{(x-1)^{2/3}}_{y_2}$$

$$\boxed{y = y_1 + y_2}$$



Как ведет себя график в окрестностях точек A и B, ответить строго без вычисления первой производной НЕЛЬЗЯ!!!

5.489 $\quad y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$

I

1. $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$

2. $y = 0 \iff x^3+2=0 \quad x = -\sqrt[3]{2}$

3. $y(-x) = \dfrac{\sqrt[3]{-x^3+2}}{-x} = \dfrac{\sqrt[3]{x^3-2}}{x} \neq y(x)$
$\neq -y(x)$

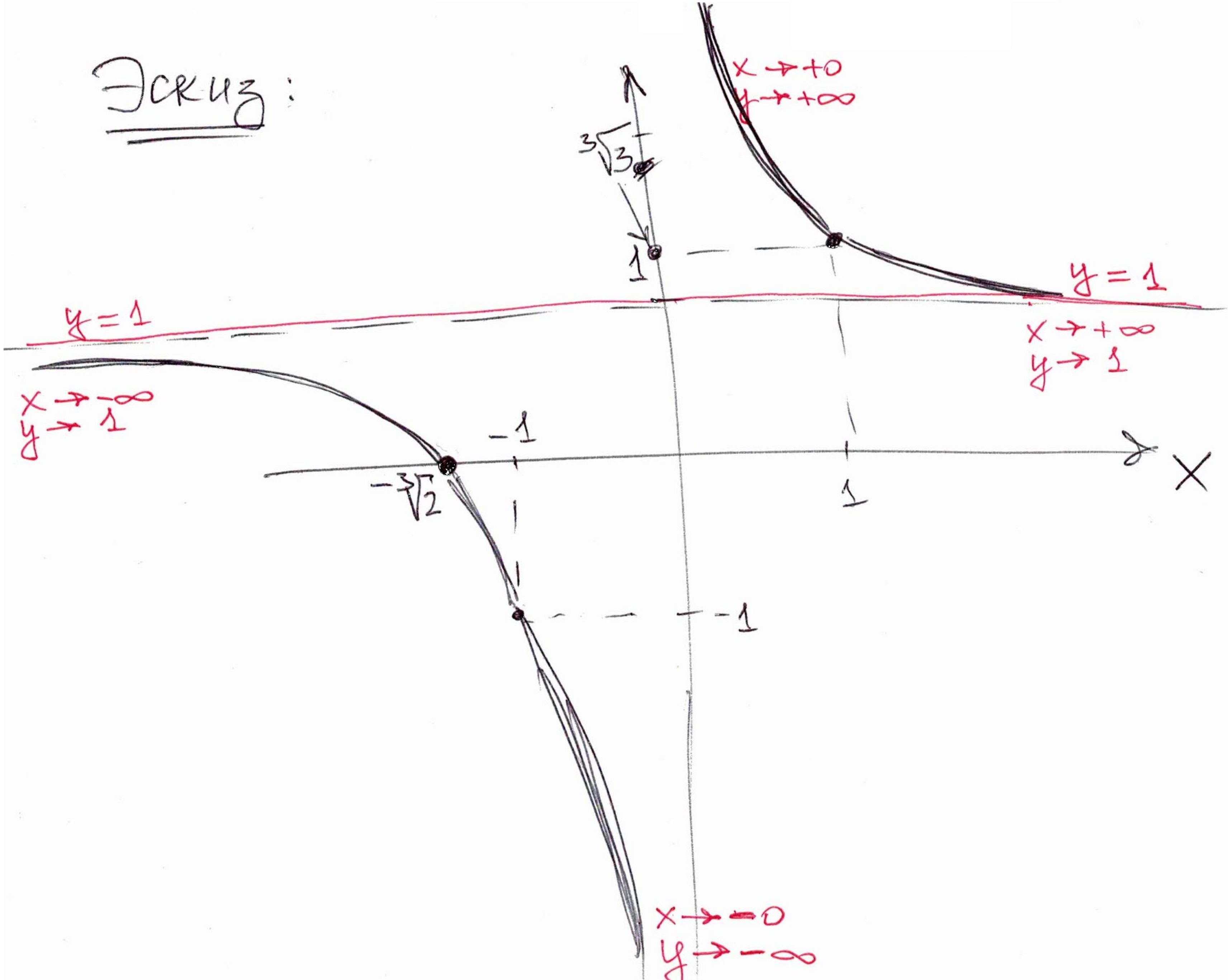
$\Rightarrow$ ф-ция общего вида

4. a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x} = 1 \Rightarrow \exists$ горизонтальная асимптота $y = 1$

б) $\lim\limits_{x \to \pm 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x} = \left[\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\pm 0}\right] = \pm\infty$

$\Rightarrow \exists$ вертикальная асимптота $x = 0$

Эскиз:



$\underline{\underline{5.489}}$ II $y' = \left(\frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}\right)' = ?$

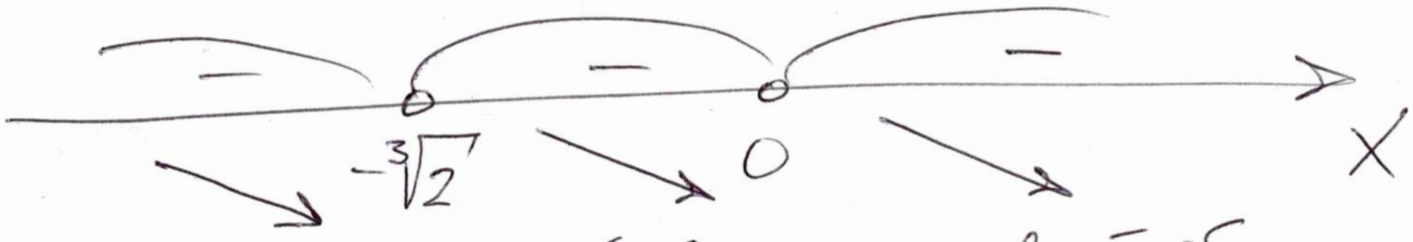
$$\ln y = \frac{1}{3}\ln|x^3+2| - \ln|x|$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}(x^3+2)} - \frac{1}{x} = \frac{x^3-(x^3+2)}{x(x^3+2)} =$$

$$= \frac{-2}{x(x^3+2)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}\cdot\left(\frac{-2}{x(x^3+2)}\right) = \frac{-2}{x^2\cdot(x^3+2)^{2/3}}$$

$\Rightarrow$ особые точки: $x=0$ и $x=-\sqrt[3]{2}$



$\Rightarrow$ $y=f(x)$ убывает на всей обл-ти определения.

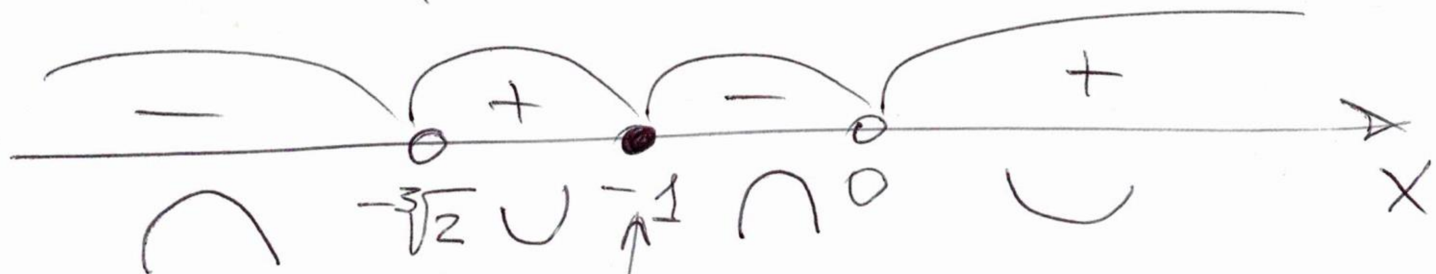
III $y'' = -2\cdot\left(x^{-2}\cdot(x^3+2)^{-2/3}\right)' =$

$$= -2\cdot\left(-2x^{-3}\cdot(x^3+2)^{-2/3} + \cancel{x^{-2}}\cdot\left(-\frac{2\cdot \cancel{3}\cancel{x^2}}{\cancel{3}(x^3+2)^{5/3}}\right)\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{x^3(x^3+2)^{2/3}} + \frac{1}{(x^3+2)^{5/3}}\right) =$$

$$= \frac{4}{(x^3+2)^{5/3}}\left(\frac{x^3+2}{x^3}+1\right) = \frac{8(x^3+1)}{(x^3+2)^{5/3}\cdot x^3}$$

$$y'' = \frac{8(x^3+1)}{x^3(x^3+2)^{5/3}}$$

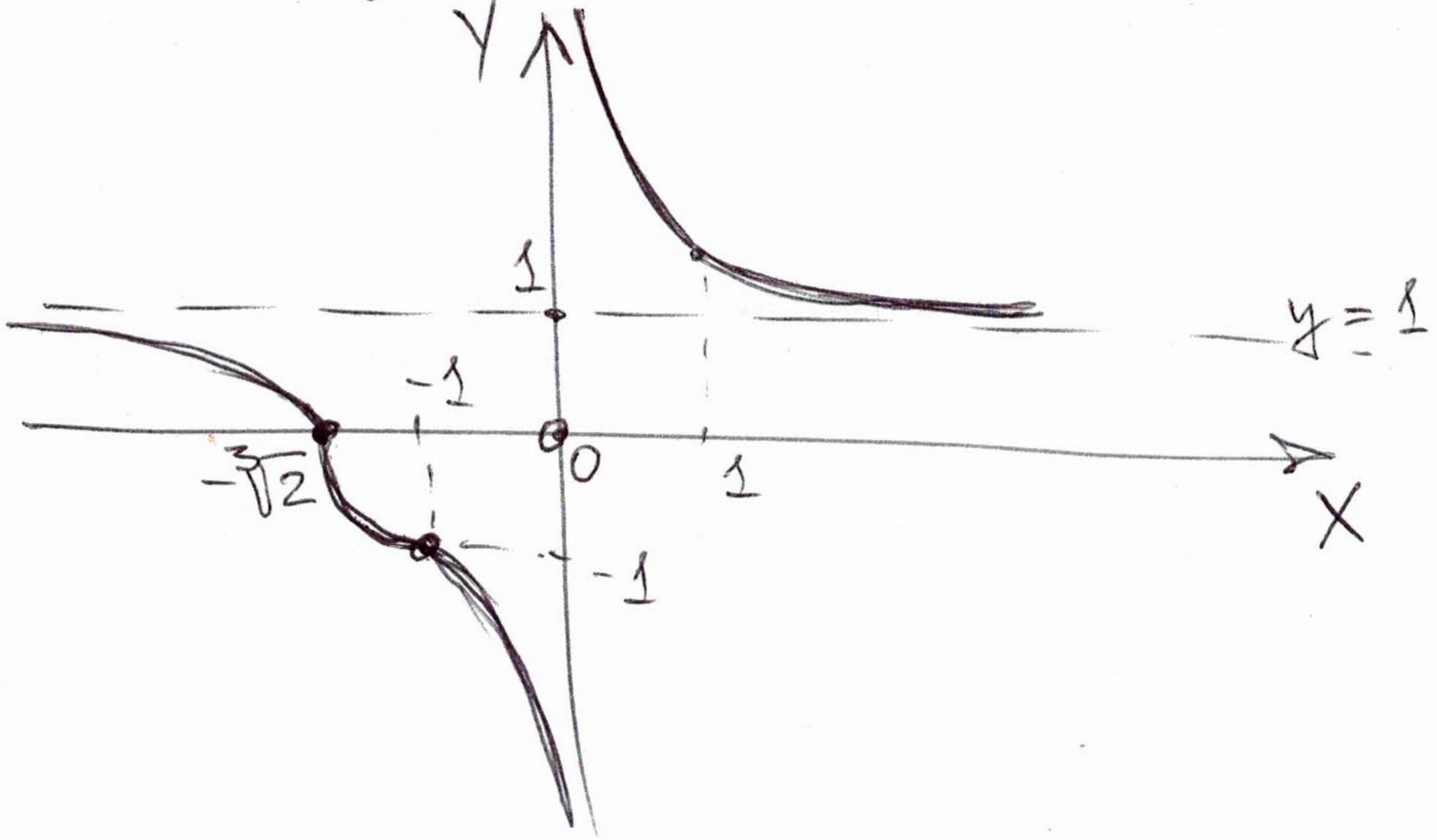


$y(-\sqrt[3]{2}) = 0$ $y(-1) = -1$

точки перегиба

Окончательный график:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$$



5.501 $y=\frac{1}{x}\cdot e^{-1/x}$

1. $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$

2. OY: нет OX: $y=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{xe^{1/x}}=0 \Longleftrightarrow \varnothing$

3. $y(-x) = -\frac{1}{x}\cdot e^{1/x} \neq y(x)$, $\neq -y(x)$ $\Rightarrow$ ф-ция общего вида

4. Поведение на концах области определения:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^{1/x}} = \left[\frac{1}{+\infty}\cdot\frac{1}{e^{1/+\infty}}\right] = +0$, $e^{1/+\infty} \to 1$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{+1/x}} = \left[\frac{1}{-\infty}\cdot\frac{1}{e^{1/-\infty}}\right] = -0$, $e^{1/-\infty} \to 1$

$\Rightarrow$ $\exists$ горизонт. асимптот $y=0$

3) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{xe^{1/x}} = \left[\dfrac{1}{+0}\cdot\dfrac{1}{\underbrace{e^{\overbrace{1/+0}^{+\infty}}}_{\to+\infty}}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right] = ???$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{e^{-1/x}}{x} \overset{\text{п.Л.}}{=} \lim_{x\to+0}\frac{e^{-1/x}\cdot\left(1/x^2\right)}{1} = \lim_{x\to+0}\frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

$\Downarrow$

у-у-у!!!...

$$= \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{e^{1/x}} \overset{\text{п.Л.}}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\cancel{(1/x)'}}{e^{1/x}\cdot\cancel{(1/x)'}} = \left[\frac{1}{e^{1/+0}}\right] = +0$$

4) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{xe^{1/x}} = \left[\dfrac{1}{-0}\cdot\underbrace{\dfrac{1}{e^{\overbrace{1/-0}^{\to-\infty}}}}_{\to+0}\right] = \left[\dfrac{1}{-0}\right] = -\infty$

Эскиз:

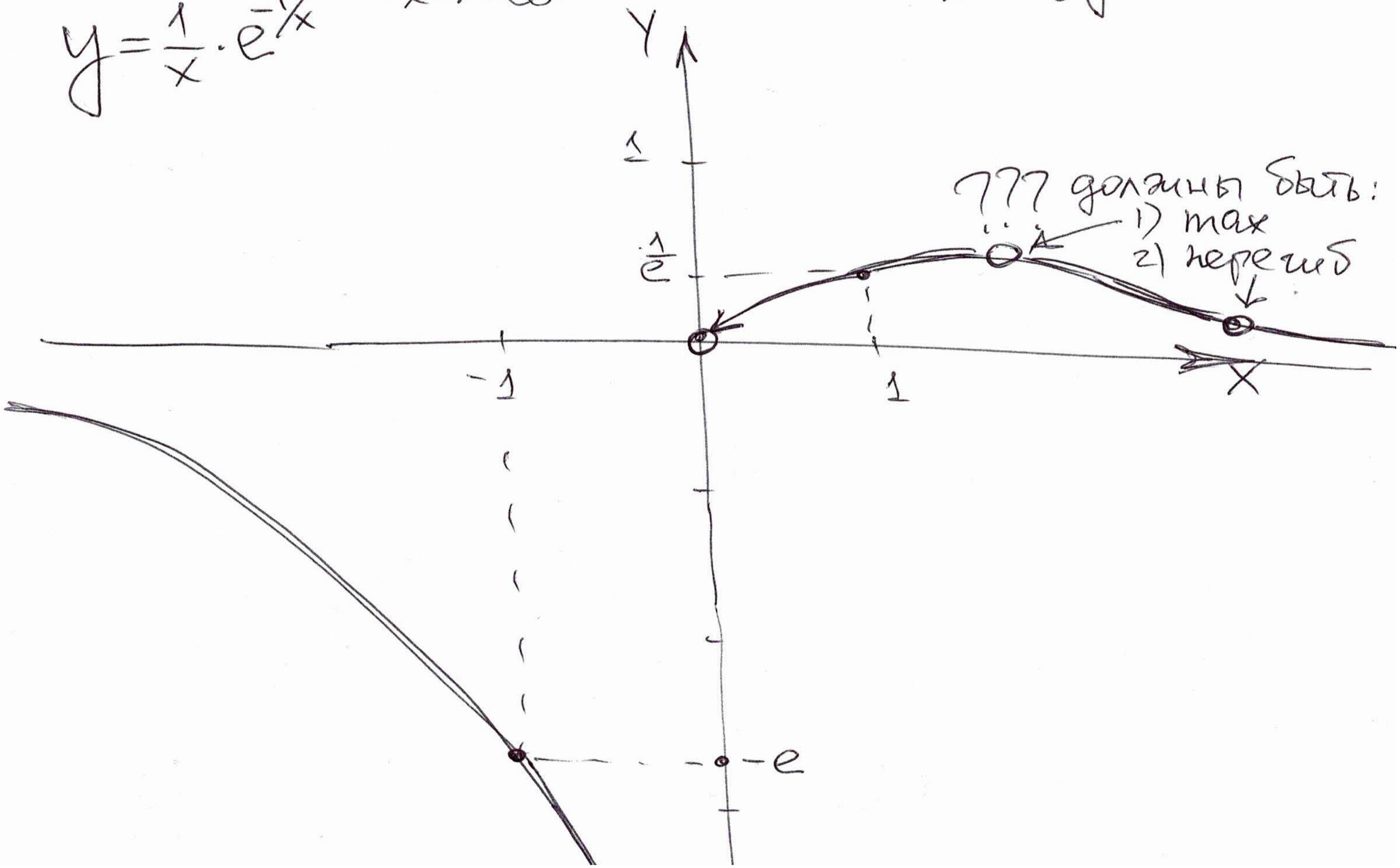
1) $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +0$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -0$

3) $\lim\limits_{x\to+0} y = +0$

4) $\lim\limits_{x\to-0} y = -\infty$

$y = \frac{1}{x}\cdot e^{-1/x}$



5.508

$$y = x^2 \cdot e^{2/x}$$

1. $x \neq 0$; $y > 0$

2. OY: нет ; $OX: y = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot e^{2/x} = 0$

$\varnothing$ на ООФ.

3. $y(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-2/x} = x^2 \cdot e^{-2/x} \neq y(x)$

$\neq -y(x)$

4. Поведение на концах ООФ:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{2/x} = \left[+\infty \cdot e^{\frac{2}{+\infty} \to +0} \to 1\right] = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{2/x} = \left[(-\infty)^2 \cdot e^{\frac{2}{-\infty}} \to +1\right] = +\infty$

3) $$\lim_{x\to+0} x^2\cdot e^{2/x} = \Big[+0\cdot \underbrace{e^{+\infty}}_{\to+\infty}\Big] = ???$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{x^2}{e^{-2/x}} \overset{\text{п.л.}}{=} \lim_{x\to+0}\frac{\cancel{2}x}{e^{-2/x}\cdot \cancel{2}/x^2} = \lim_{x\to+0}\frac{x^3}{e^{-2/x}}$$

$$\Downarrow$$

Y–Y–Y!!!

$$= \lim_{x\to+0}\frac{e^{2/x}}{x^{-2}} \overset{\text{п.л.}}{=} \lim_{x\to+0}\frac{e^{2/x}\cdot(-\cancel{2}/x^2)}{-\cancel{2}\cdot x^{-3}} =$$

$$= \lim_{x\to+0} x\cdot e^{2/x} = \lim_{x\to+0}\frac{e^{2/x}}{1/x} \overset{\text{п.л.}}{=} \lim_{x\to+0}\frac{e^{\overset{\to+\infty}{2/x}}\cdot 2\cdot \cancel{(1/x)'}}{\cancel{(1/x)'}} =$$

$$= 2\cdot+\infty = +\infty$$

4) $\lim\limits_{x\to -0} x^2\cdot e^{2/x} = \left[+0\cdot \underbrace{e^{\overbrace{\frac{2}{-0}}^{\to -\infty}}}_{\to +0}\right] = +0$

5. Наклонные асимптоты

$$k_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\cdot e^{2/x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{2/x}}{1/x} \overset{\text{п.Л.}}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overbrace{e^{2/x}}^{\to 1}\cdot 2\cdot(1/x)'}{(1/x)'} = 2$$

$$b_\pm = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x^2 e^{2/x} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(x e^{\overbrace{2/x}^{\to 0}} - 2\right) = +\infty \Rightarrow$$ нет асимптоты

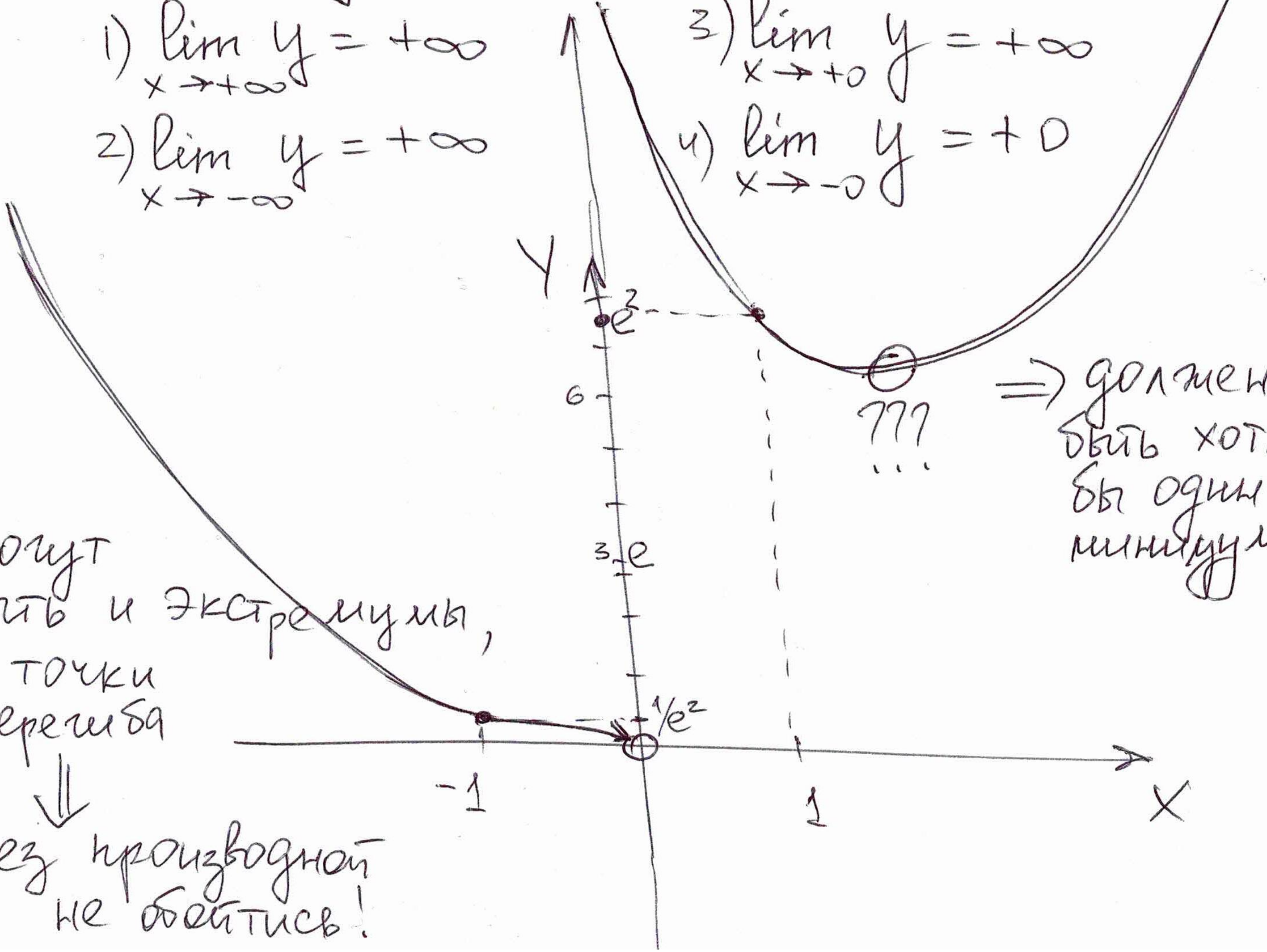
Эскиз: $y = x^2 \cdot e^{2/x}$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +0} y = +\infty$

4) $\lim\limits_{x \to -0} y = +0$



$\Rightarrow$ должен быть хотя бы один минимум

Могут быть и экстремумы, и точки перегиба

$\Downarrow$

без производной не обойтись!

5.513. $y = x^2 \cdot \ln x$

1. $x > 0$; $y \in \mathbb{R}$

2. OY: нет; OX: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \ln x = 0$

$\ln x = 0$

$x = 1$

3. Функция общего вида

4. Поведение на концах ООФ:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \cdot \ln x = [+\infty \cdot +\infty] = +\infty$

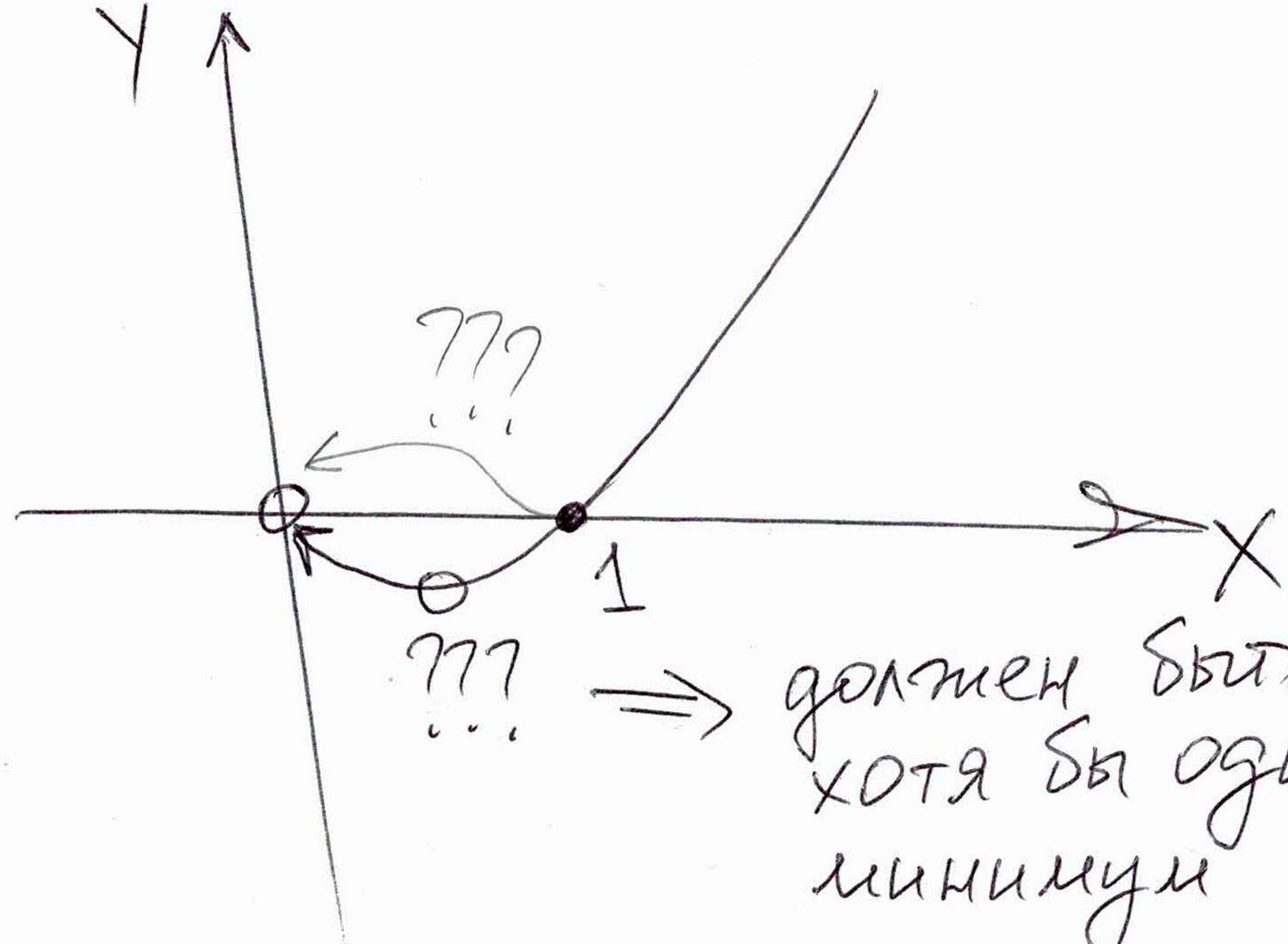
2) $\lim\limits_{x \to +0} x^2 \cdot \ln x = [+0 \cdot (-\infty)] = ???$

$\lim\limits_{x \to +0} \frac{\ln x}{x^{-2}} \overset{\text{п.Л.}}{=} \lim\limits_{x \to +0} \frac{1/x}{-2 \cdot x^{-3}} = -\lim\limits_{x \to +0} \frac{x^2}{2} = -0$

5. Наклонная асимптота на $+\infty$:

$$k_+ = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \ln x = +\infty \Rightarrow$$ нет асимптоты

Эскиз:



$\Longrightarrow$ должен быть хотя бы один минимум

5.514.

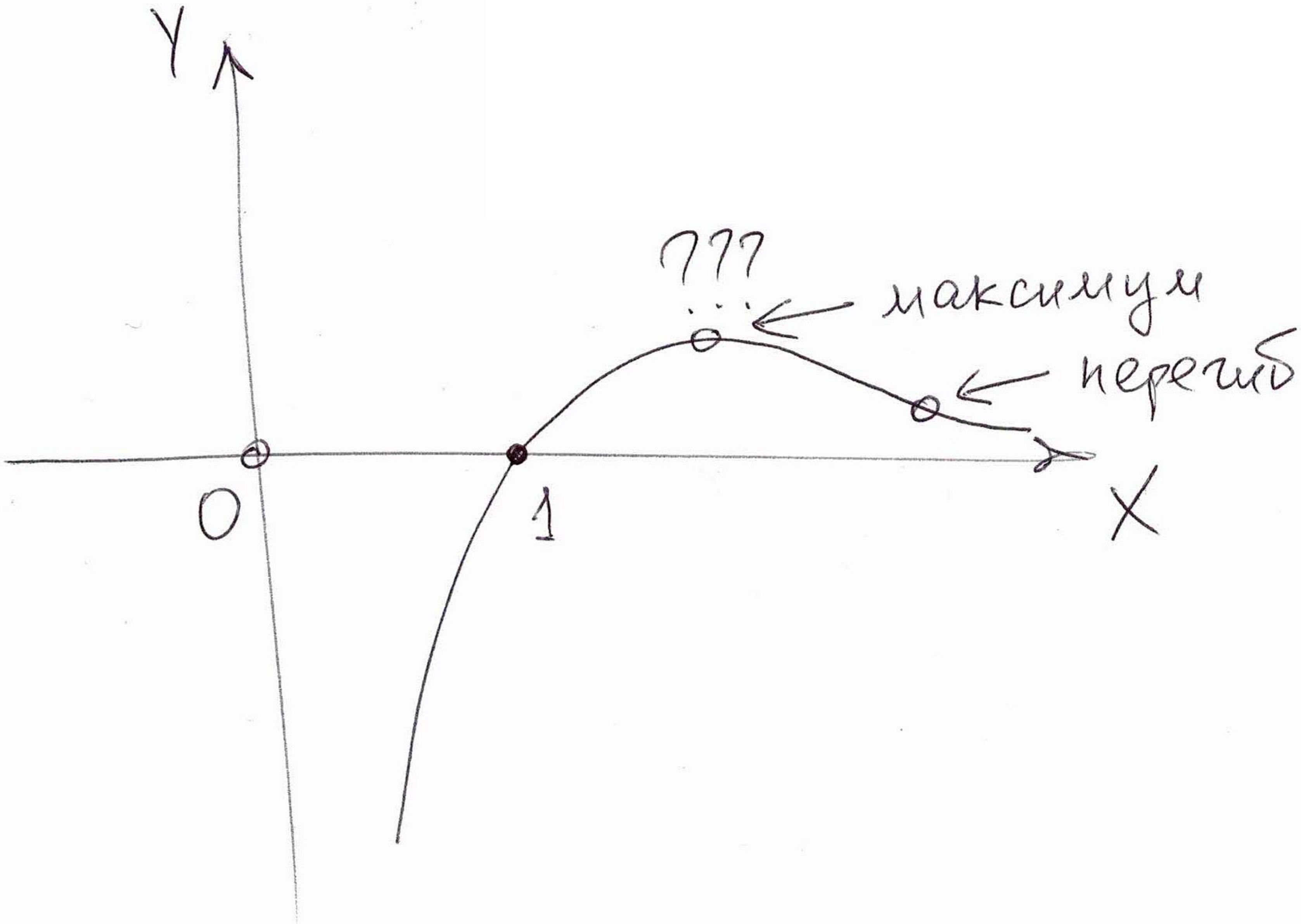
$$y = \frac{\ln x}{x^2}$$

1. $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$
2. OY: нет; OX: $y = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$
3. Функция общего вида.
4. Поведение на концах ООФ:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \overset{\text{п. Л.}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = +0$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{x^2} = \left[\frac{-\infty}{+0}\right] = \left[-\infty \cdot \underbrace{\frac{1}{+0}}_{+\infty}\right] = -\infty$$

Эскиз:



5.521

$$y = x^{1/x}$$

I

1. $x > 0$, $y > 0$
2. Нет точек пересечения с осями координат
3. Функция общего вида
4. Поведение на концах ООФ:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/x} = \left[(+\infty)^{1/+\infty}\right] = 1 \Rightarrow$ на $+\infty$ $\exists$ горизонт. асимптота $y = 1$

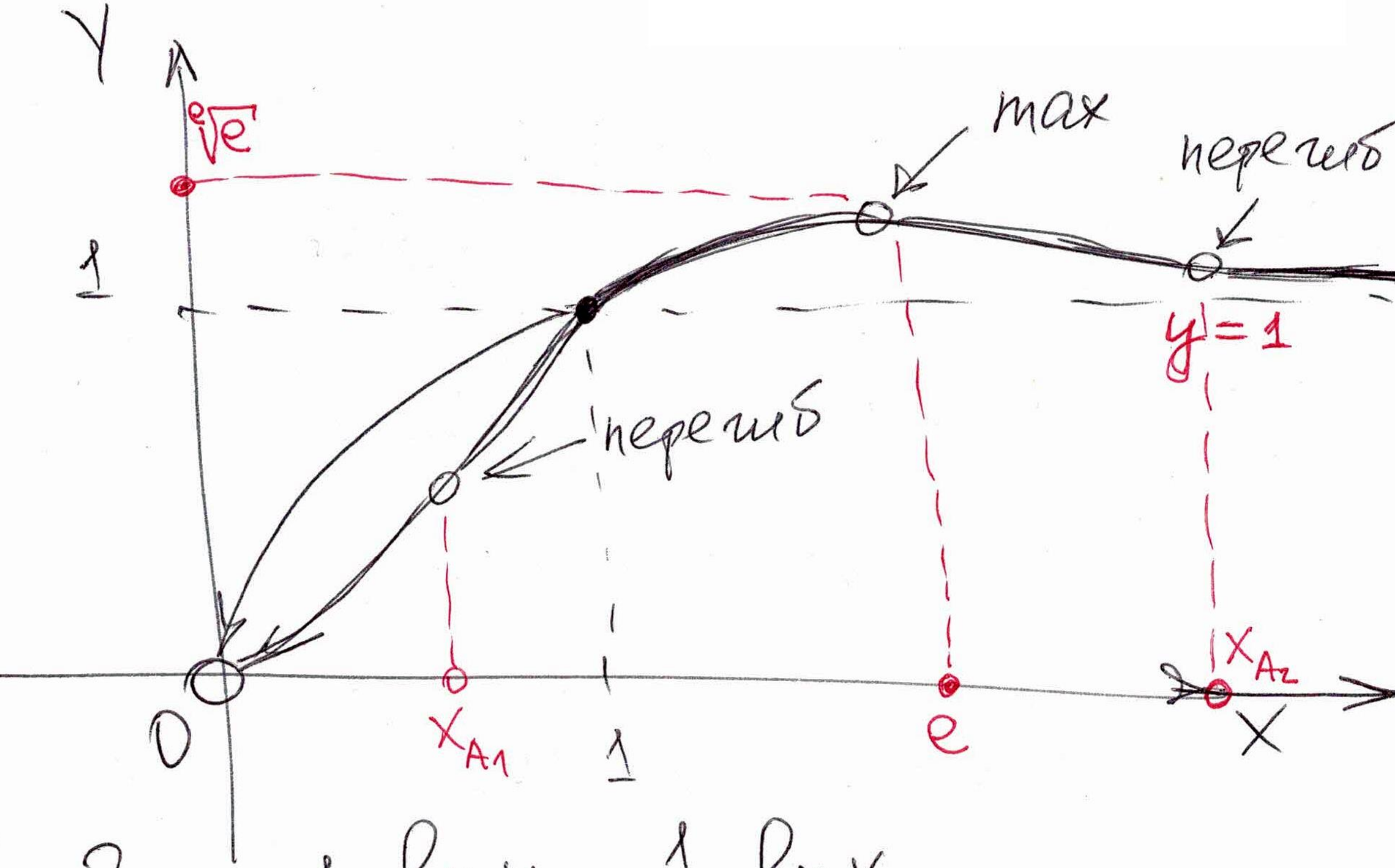
2) $\lim\limits_{x \to +0} x^{1/x} = \left[(+0)^{1/+0}\right] = \left[(+0)^{+\infty}\right] = ??? = A$

Рассм. $\ln A = \lim\limits_{x \to +0} \ln(x^{1/x}) = \lim\limits_{x \to +0} \underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\ln x}_{-\infty}$

$$\Rightarrow \ln A = -\infty$$

$$A = e^{-\infty} = +0$$

Эскиз:



II $\quad y' = ?$ $\quad$ 1. $\ln y = \frac{1}{x} \ln x$

2. $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1-\ln x)$

$\Rightarrow y' = x^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (1 - \ln x) \qquad y' = 0 \Leftrightarrow x = e$

$\boxed{y_{max} = e^{1/e}} \Leftarrow$ 0 $\quad + \quad$ max $\quad - \quad$ x

III $\quad y'' = \left(x^{\frac{1}{x}-2}\cdot(1-\ln x)\right)'$ $\qquad (uv)' = u'v + v'u$

$$= \left(x^{\frac{1}{x}-2}\right)'\cdot(1-\ln x) + x^{\frac{1}{x}-2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) \overset{\star}{=}$$

$\star$: $y_1 = x^{\frac{1}{x}-2}$

1. $\ln y_1 = \left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\ln x$

2. $\frac{y_1'}{y_1} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\ln x + \left(\frac{1}{x}-2\right)\cdot\frac{1}{x}$

$$= \frac{1}{x^2}\left(1-\ln x-2x\right)$$

$$\Rightarrow y_1' = x^{\frac{1}{x}-2}\cdot x^{-2}\cdot(1-\ln x-2x) =$$

$$= x^{\frac{1}{x}-4}(1-2x-\ln x)$$

$$\boxed{1-\ln x = \ln e - \ln x = \ln\frac{e}{x}}$$

$$\overset{\star}{=} x^{\frac{1}{x}-4}\Big(\underbrace{1-2x-\ln x}_{-2x-\ln\frac{x}{e}}\Big)\cdot\Big(\underbrace{1-\ln x}_{-\ln\frac{x}{e}}\Big)-x^{\frac{1}{x}-3}=$$

$$-\left(\ln\tfrac{x}{e}+2x\right)\cdot\left(-\ln\tfrac{x}{e}\right)$$

$$=+x^{\frac{1}{x}-4}\left(\ln\frac{x}{e}+2x\right)\left(\ln\frac{x}{e}\right)-x^{\frac{1}{x}-4+1}=$$

$$=x^{\frac{1}{x}-4}\left(\ln^2\frac{x}{e}+2x\cdot\ln\frac{x}{e}-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ln^2\frac{x}{e}+2x\cdot\ln\frac{x}{e}-x=0} \quad (*)$$

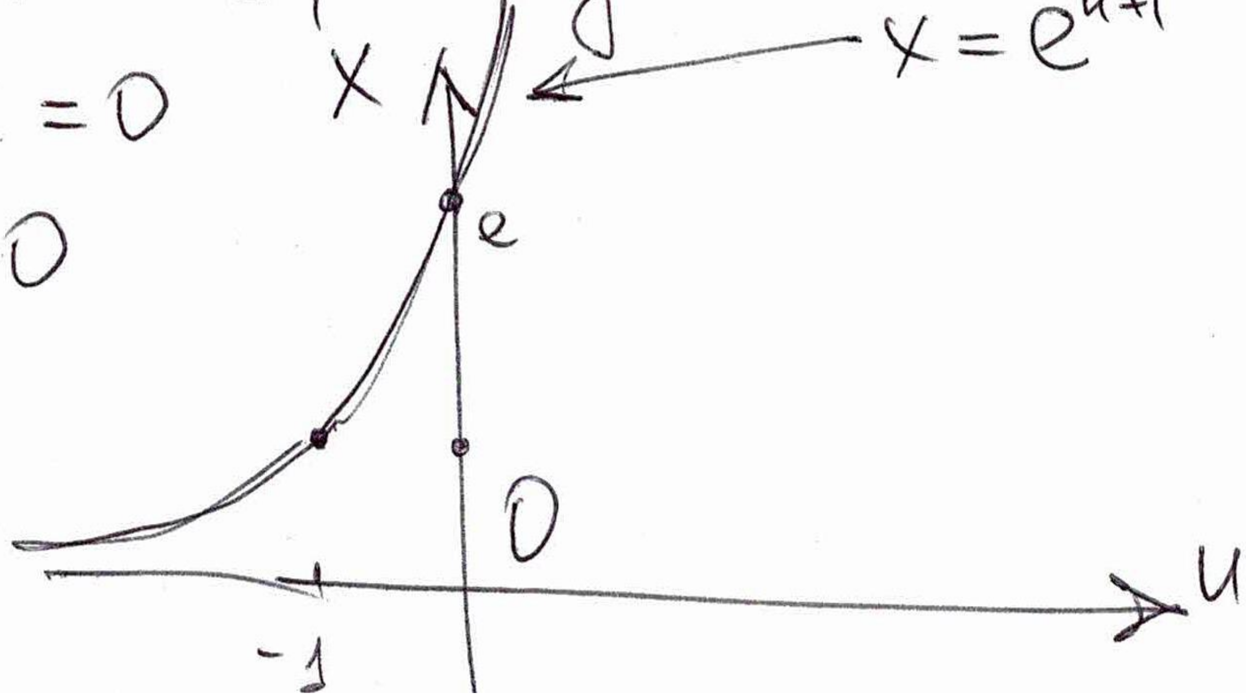
Обозначим $u = \ln x - 1$, тогда $\ln x = u + 1$

$$x = e^{u+1}$$

$$(*) : u^2 + 2x \cdot u - x = 0$$

$$u^2 + x(2u - 1) = 0$$

$$x = \frac{u^2}{1-2u}$$

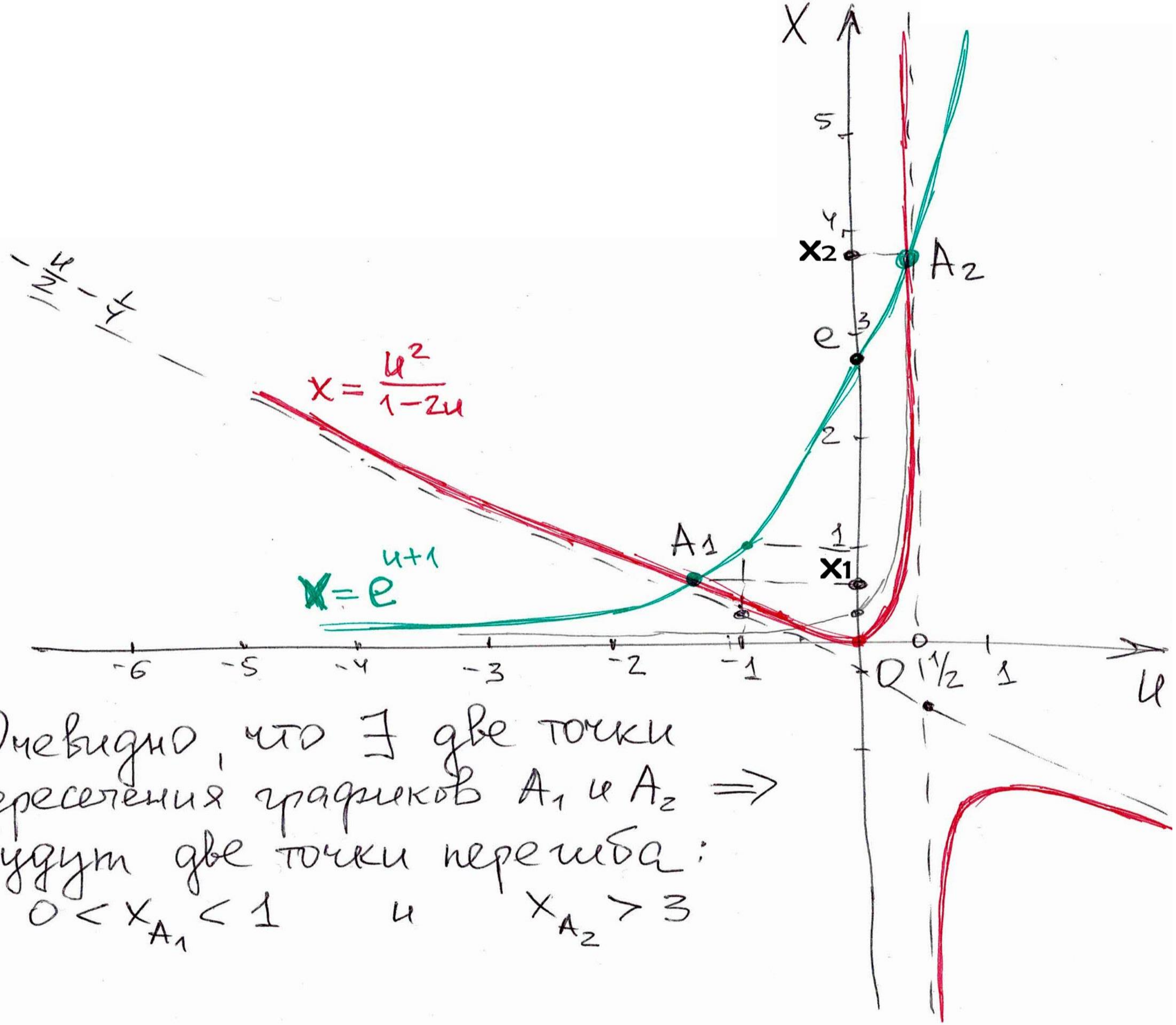


Для решения (*) в системе координат $\overline{uOX}$ построим графики $x_1 = e^{u+1}$ и

$$x_2 = \frac{u^2}{1-2u} = \text{(после деления "столбиком")}$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\right)}_{\text{прямая}} + \underbrace{\frac{1}{4(1-2u)}}_{\text{гипербола}}$$

и найдем их точки пересечения в верхней полуплоскости $x > 0$:



Очевидно, что $\exists$ две точки пересечения графиков A_1 и A_2 $\Rightarrow$ будут две точки перегиба:

$0 < x_{A_1} < 1$ и $x_{A_2} > 3$