

ПРОИЗВОДНАЯ

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Для любых двух дифференцируемых функций на области определения
верно:

1. $(c)' = 0$

2. $(u + v)' = u' + v'$

3. $(uv)' = u'v + uv'$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5. Производная сложной функции $y = f(g(x))$ вычисляется в соответствии с формулой

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Производная сложной функции.

Пусть есть сложная функция:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, \text{ т.е. } Z = g(f(x))$$
$$y = f(x) \text{ и } z = g(y)$$

Тогда если $\exists f'(x)$ и $g'(y)$, то

$$\exists z'_x = g'_y(y(x)) \cdot f'(x)$$

Примеры: ① $y = e^{\sqrt{\ln(2x^2 - 3x + 1)}}$

$$1) y = e^t \Rightarrow y'_t = e^t$$

$$2) y = \sqrt{t} \Rightarrow y'_t = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$3) y = \ln t \Rightarrow y'_t = \frac{1}{t}$$

$$y' = \frac{1}{t(x)} \cdot t'(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ y'_t &= \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow y' = e^{\sqrt{\ln(2x^2 - 3x + 1)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(2x^2 - 3x + 1)}} \cdot \frac{1}{(2x^2 - 3x + 1)^1} \cdot \frac{(4x - 3)}{1}$$

Логарифмическая производная

Примеры: ① $y = x^x$. Найти y' .

$$y' \neq x \cdot x^{x-1}, \text{ хотя}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y' \neq x^x \cdot \ln x, \text{ хотя}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

Правильное решение:

$$1. \ln y = \ln(x^x) = x \cdot \ln x$$

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln|a|$$

$$2. (\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$

сложная ф-ция произведение простых ф-ций

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \quad | \cdot y$$

$$3. y' = (\ln x + 1) \cdot x^x - \text{Ответ.}$$

② $y = x^{x^x}$, найти y' .

①. $\ln y = x^x \cdot \ln x$

②. $\frac{y'}{y} = (x^x)' \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} = (\text{из примера ①})$
 $= x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot \ln x + x^{x-1} =$
 $= x^{x-1} (x \ln^2 x + x \ln x + 1) \quad | \cdot y$

$\Rightarrow \text{Ответ: } y' = x^{x^x} \cdot x^{x-1} \cdot (x \ln^2 x + x \ln x + 1)$

3

$$y = \sqrt{\frac{x^2(x-4)}{3x-2}}$$

Найти y' .

1. $\ln y = \ln \left(\frac{x^2(x-4)}{3x-2} \right)^{1/2} =$ свойства логарифмов

$$= \frac{1}{2} (2 \ln |x| + \ln |x-4| - \ln |3x-2|)$$

$$(\ln |x|)' = \begin{cases} x > 0 \\ (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ x < 0 \\ (\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \end{cases} = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2.} \quad \frac{y'}{y} &= \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} - \frac{3}{3x-2} \right) = \\
 &= \frac{2(x-4)(3x-2) + x(3x-2) - 3x(x-4)}{2x(x-4)(3x-2)} = \\
 &= \frac{6x^2 - 18x + 16}{2x(x-4)(3x-2)} = \frac{3x^2 - 9x + 8}{x(x-4)(3x-2)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 9x + 8}{x(x-4)(3x-2)} \cdot \sqrt{\frac{x^2(x-4)}{3x-2}} = \left(\sqrt{x^2} = |x| \right)$$

$$= \frac{|x|}{x} \cdot \frac{3x^2 - 9x + 8}{\sqrt{x-4} \cdot (3x-2)^{3/2}} \quad - \text{ОТВЕТ.}$$

План исследования ф-ции
 $y = f(x)$ для построения графика.

①. Расскажем про $y = f(x)$ всё, что можно,
БЕЗ производной:

1. Область определения

2. Область значений

3. Точки пересечения с осями координат.

а) ОХ: $y = 0 \Rightarrow x = \dots$ (решаем уравнение)
 $f(x) = 0$

б) ОУ: $x = 0 \Rightarrow y = f(0)$

4. Чётность: а) если $f(-x) = f(x)$, то
ф-ция чётная $\Rightarrow$ график
симметричен отн. OY ;
б) если $f(-x) = -f(x)$, то ф-ция нечётная
 $\Rightarrow$ график симметричен центрально
отн. начала координат.

5. Периодичность.

6. Поведение на концах области определения:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ?$

б) Левосторонние и правосторонние
пределы в окрестности особых точек
(конечных).

7. Асимптоты есть?

8. Эскиз.

Асимптоты бывают разные!

(прямые, к которым стремится график ф-ции)

- ① Вертикальные, если $\exists$ точка разрыва области определения $\boxed{x = a}$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

- ② Горизонтальные:

а) если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c (\equiv \text{const})$, то

при $x \rightarrow +\infty$ график $\rightarrow$ к прямой

$$\boxed{y = c}$$

б) если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d (\equiv \text{const})$, то

при $x \rightarrow -\infty$ график $\rightarrow$ к прямой

$$\boxed{y = d}$$

③ Наклонные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными $\Rightarrow$ нужно рассматривать два случая а) и б). (как в ②)

$$y = kx + b$$

(*) $f(x) \sim kx + b$ — уравнение любой прямой $\Rightarrow$ надо найти k и b .

1) сначала ищем k : в (*) пренебрегаем b
 $\Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \begin{cases} \text{а) } k=0 \Rightarrow \text{горизонт. асимптота} \\ \text{б) } k=\infty \Rightarrow \text{асимптот нет} \\ \text{в) } k \equiv \text{const и мы её} \end{cases}$

2) ищем b из (*):

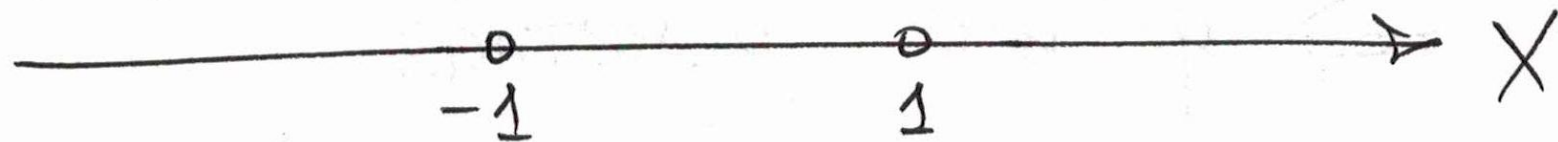
$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \dots \Rightarrow \begin{cases} b = \infty \Rightarrow \text{нет асимптоты} \\ b \equiv \text{const} \Rightarrow \text{есть} \end{cases}$

Примеры ① Построить график ф-ции

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$$

I. 1. Область определения:

делить на 0 нельзя $\Rightarrow x \neq \pm 1$



$$\Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

$\Rightarrow$ у области определения 6 концов

$\Rightarrow$ позже нужно вычислить 6 пределов

2. Область значений: $y \in \mathbb{R}$.

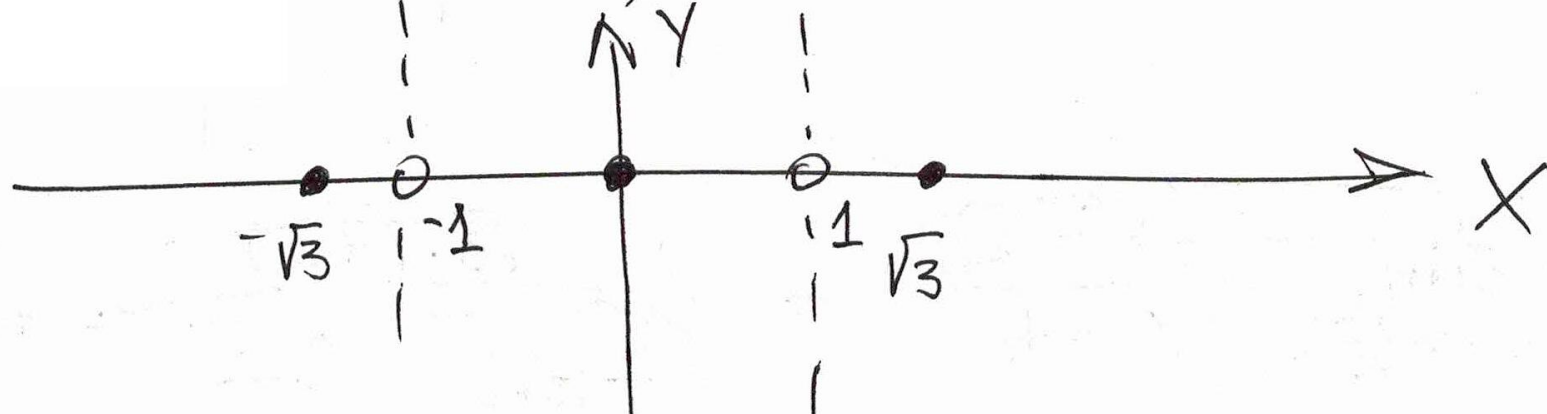
3. Точки пересечения с осями координат:

$$OY: x=0 \Rightarrow y = \frac{0}{-1} = 0$$

$$OX: y=0 \Rightarrow \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3) = 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists$ три точки пересечения с OX:

$$x=0; \quad x=-\sqrt{3}; \quad x=\sqrt{3}$$



4. Четность: $f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 - 1} =$

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 - 1} =$$

$$= -\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

$\Rightarrow$ заданная
ф-ция нечетная

$\Rightarrow$ график будет центрально симметричен
относительно $(0;0)$.

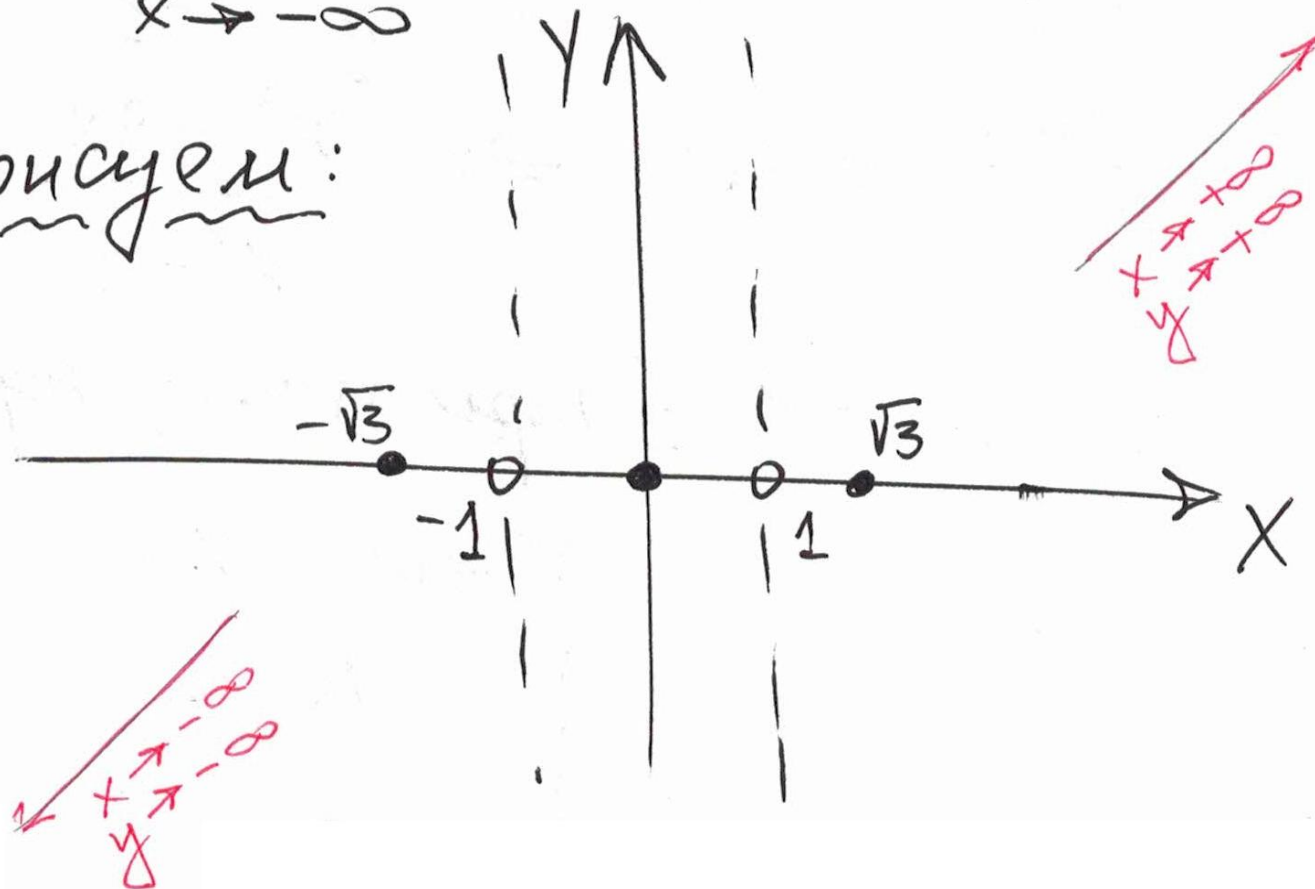
5. Не периодическая.

6. Поведение на концах области определения:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Нарисуем:



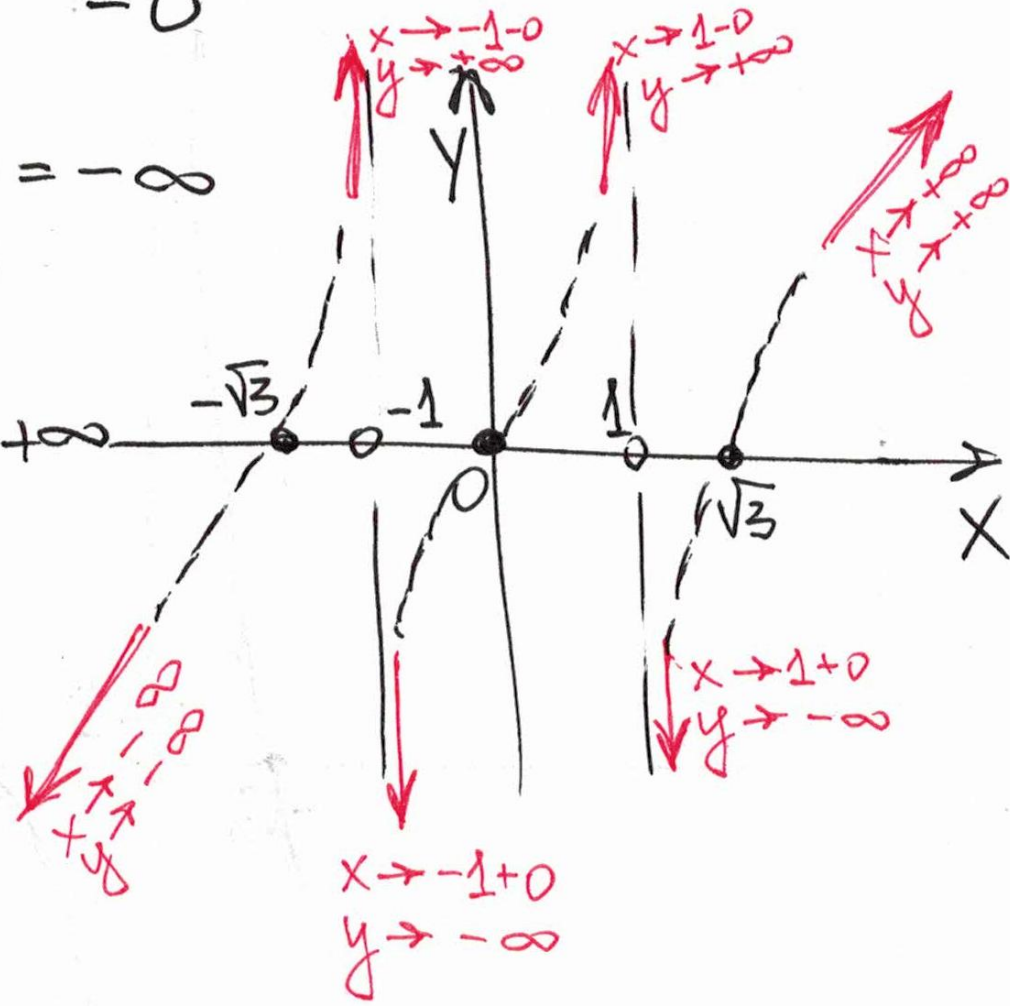
$$3) a) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x(x^2-3)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1 \cdot (-2)}{+0} = -\infty$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x(x^2-3)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1 \cdot (-2)}{-0} = +\infty$$

$$4) a) \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x(x^2-3)}{x^2-1} = \left[\frac{(-1) \cdot (-2)}{(-0)} \right] = -\infty$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x(x^2-3)}{x^2-1} = \left[\frac{(-1) \cdot (-2)}{+0} \right] = +\infty$$

⇒ почти
Эскиз:



4. Асимптоты:

1. Вертикальные есть (см. раньше п. 6 (3-4)).

$$x = \pm 1$$

2. Горизонтальных нет (п. 6 (1-2)).

3. Наклонные — ? $\Rightarrow \underline{y = kx + b}$

$$1) k_{+} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x}{x(x^2 - 1)} = 1$$

$$k_{-} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x}{x^3 - x} = 1$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

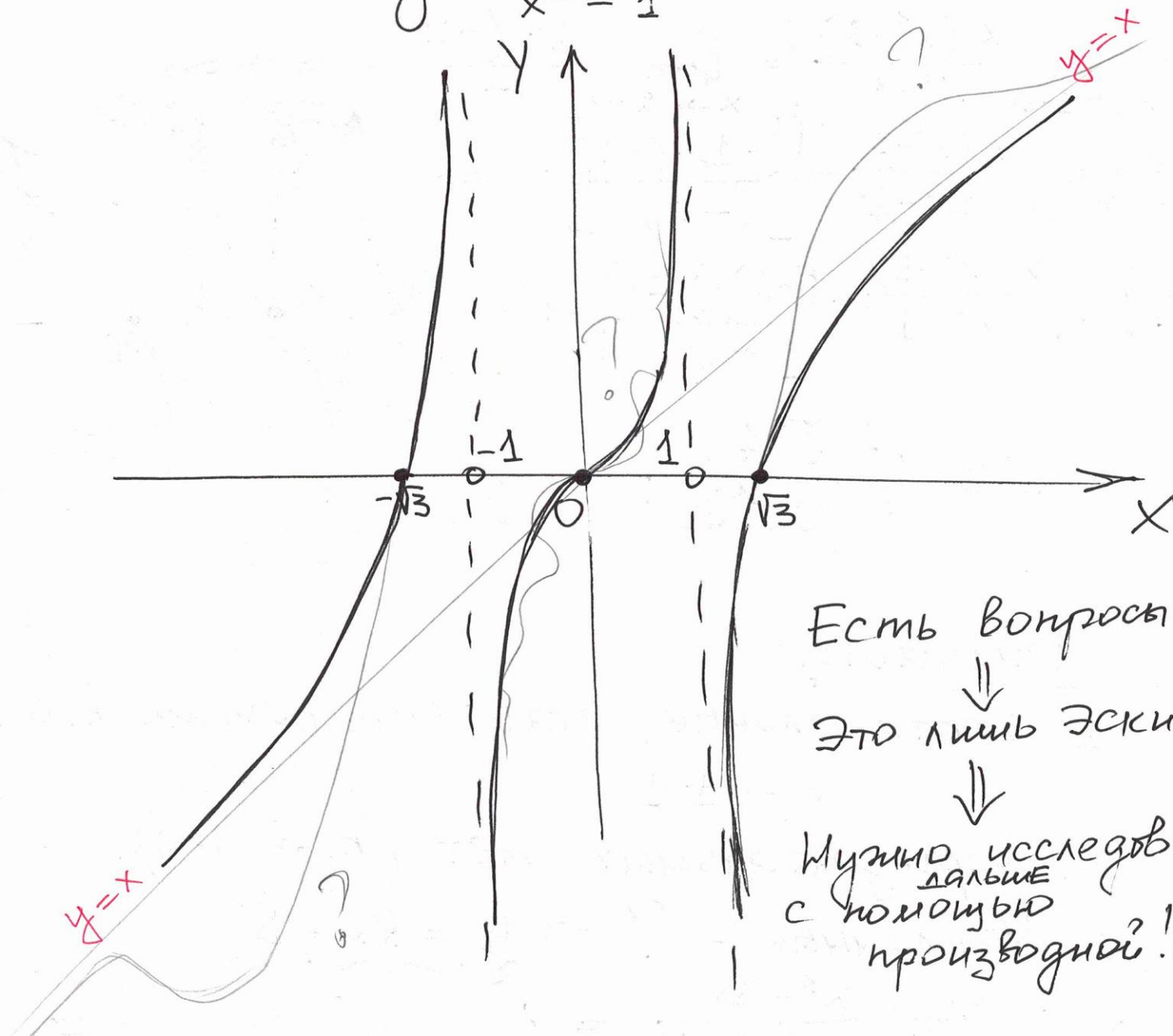
$$2) b_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x}{x^2 - 1} = 0$$

$\Rightarrow \exists$ наклонная асимптота $y = x$

8. Эскиз:

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$$



Есть вопросы!

⇓
Это лишь эскиз!

⇓
Нужно исследовать
с помощью
производной!!!

II

С помощью первой производной находят экстремумы и участки возрастания-убывания функции:

$$y' = \left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(3x^2 - 3)(x^2 - 1) - (x^3 - 3x) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 3}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \emptyset \quad y \text{ на } \Rightarrow \underline{\text{экстремумов нет}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y' > 0$$

$\Rightarrow$ наша ф-ция возрастает на
всей обл-ти определения.

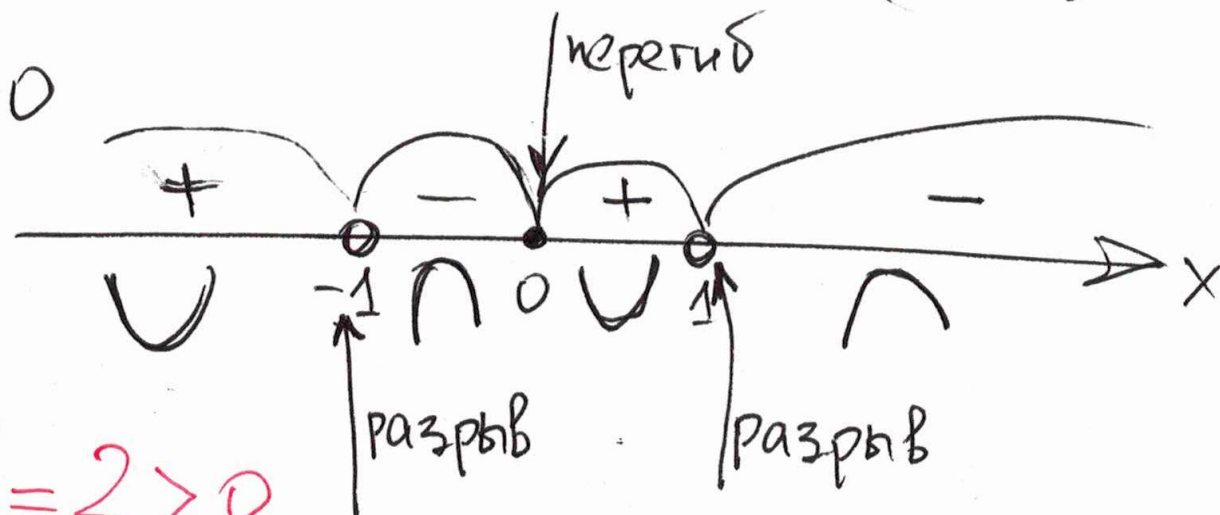
III.

С помощью второй производной находят точки перегиба и участки выпуклости-вогнутости ($\cap$) ($\cup$)

$$y'' = \left(\frac{x^4 + 3}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 1)^2 (4x^3) - (x^4 + 3) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{4x \cancel{(x^2 - 1)} (x^2(x^2 - 1) - (x^4 + 3))}{(x^2 - 1)^{\cancel{4}_3}} = \frac{-4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

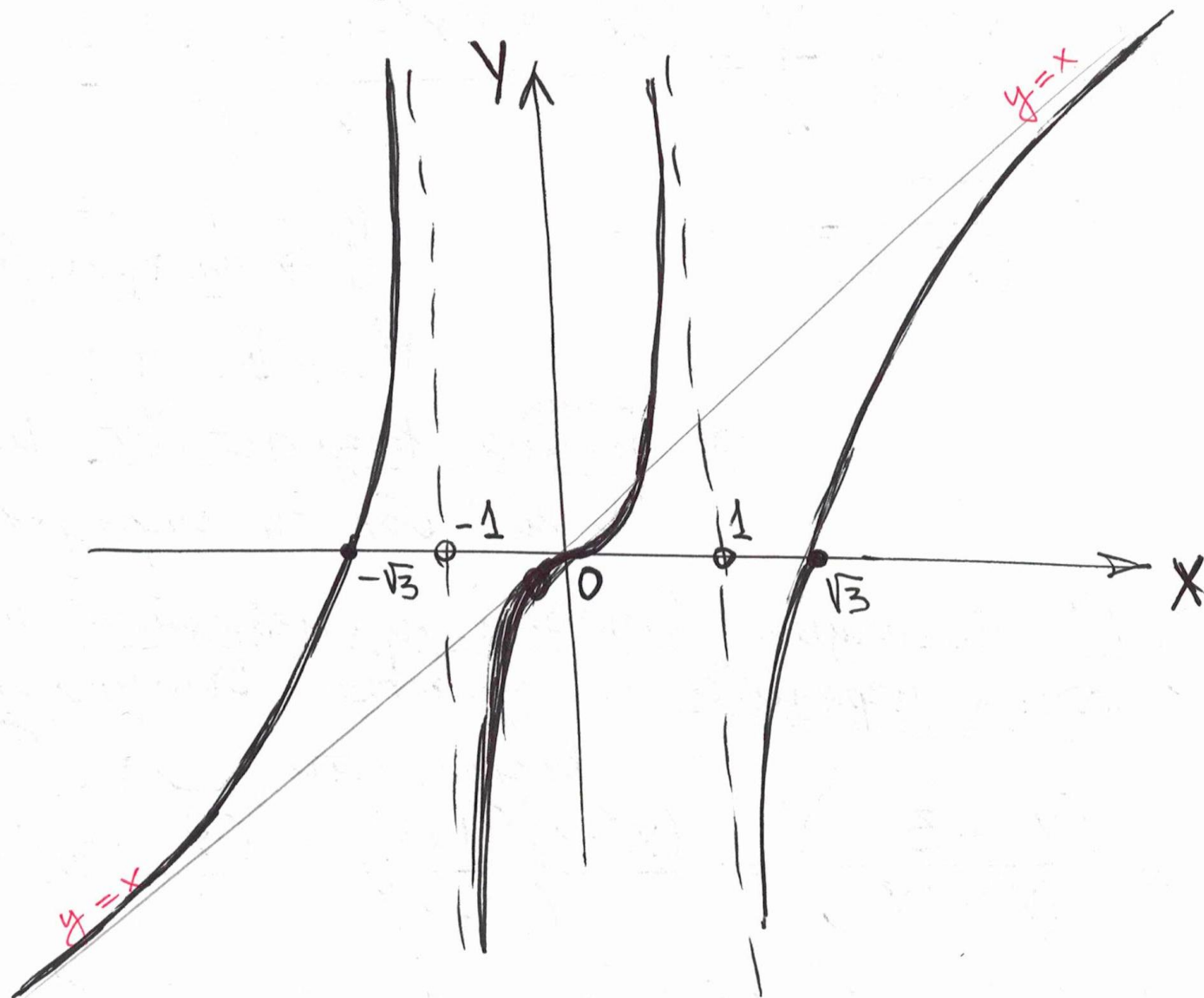
$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



$$(x^2)'' = (2x)' = 2 > 0$$

⇒ Окончательный вид графика:

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$$



② Построить график функции

$$y = e^{-x^2 + 3x - 2}$$

I. 1. $x \in \mathbb{R}$ 2. $y > 0$

3. $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y = e^{-2} \\ y=0 \Leftrightarrow \emptyset \end{cases}$

4. $f(-x) = e^{-(-x)^2 + 3(-x) - 2} = e^{-x^2 - 3x - 2}$

$$\left. \begin{array}{l} \neq f(+x) \\ \neq -f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{р-ция общего вида}$$

5. Не периодическая.

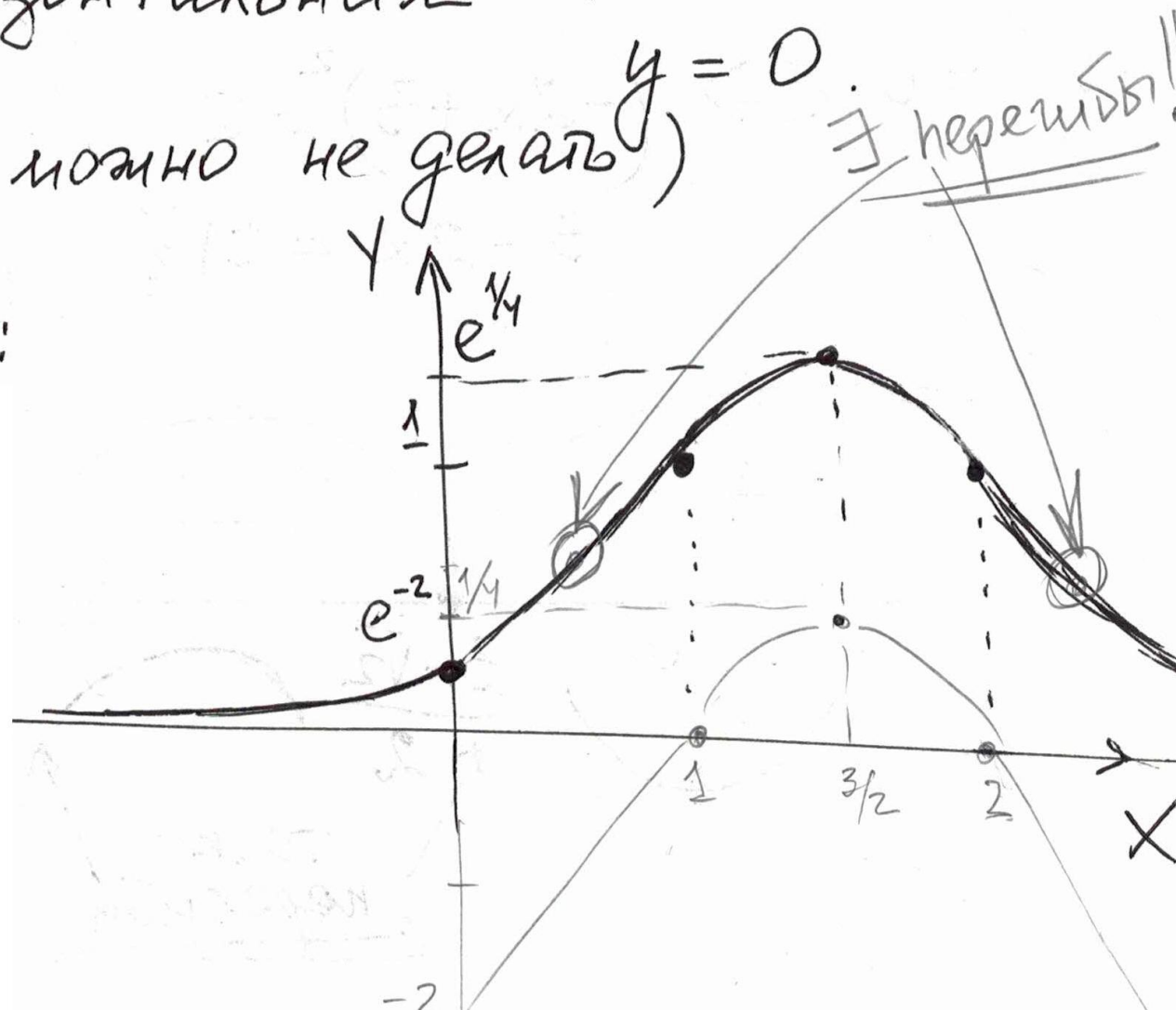
$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 3x - 2 \\ &\equiv \text{парабола ветвями} \\ x_{1,2} &= \{1; 2\} \text{ вниз} \\ x_0 &= \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \quad y_0 = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - 2 = +\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{-x^2+3x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{-x^2} = [e^{-\infty}] = +0$$

$\Rightarrow \exists$ горизонтальная асимптота

($\Rightarrow$ н.ч. можно не делать) $y=0$ $\exists$ пересбы!

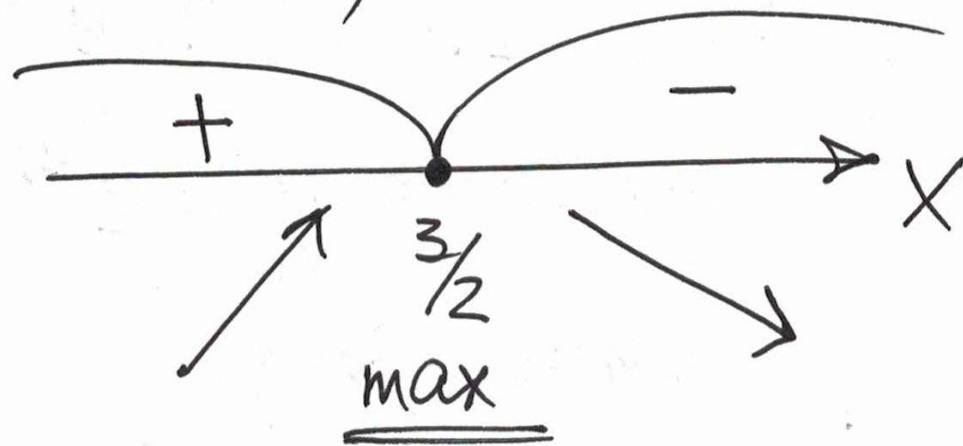
$\Rightarrow$ Эскиз:



II. $y' = (e^{-x^2+3x-2})' =$ $(e^t)' = e^t \cdot t'$

$$= e^{-x^2+3x-2} \cdot (-2x+3)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$



$$y\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{III. } y'' = \left((-2x+3) \cdot e^{-x^2+3x-2} \right)' =$$

$$= -2 \cdot e^{-x^2+3x-2} + (-2x+3) \cdot e^{-x^2+3x-2} \cdot (-2x+3)$$

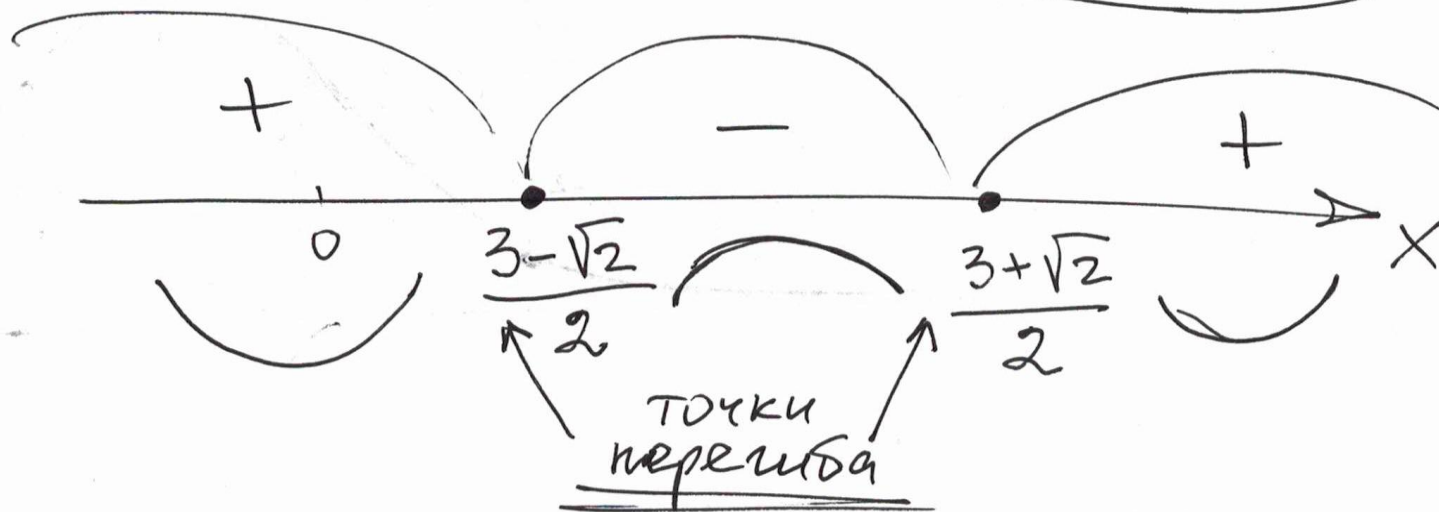
\$(uv)' = u'v + v'u\$

$$= e^{-x^2+3x-2} \cdot \underbrace{\left(-2 + (-2x+3)^2 \right)}_{\text{парабола ветвями вверх}}$$

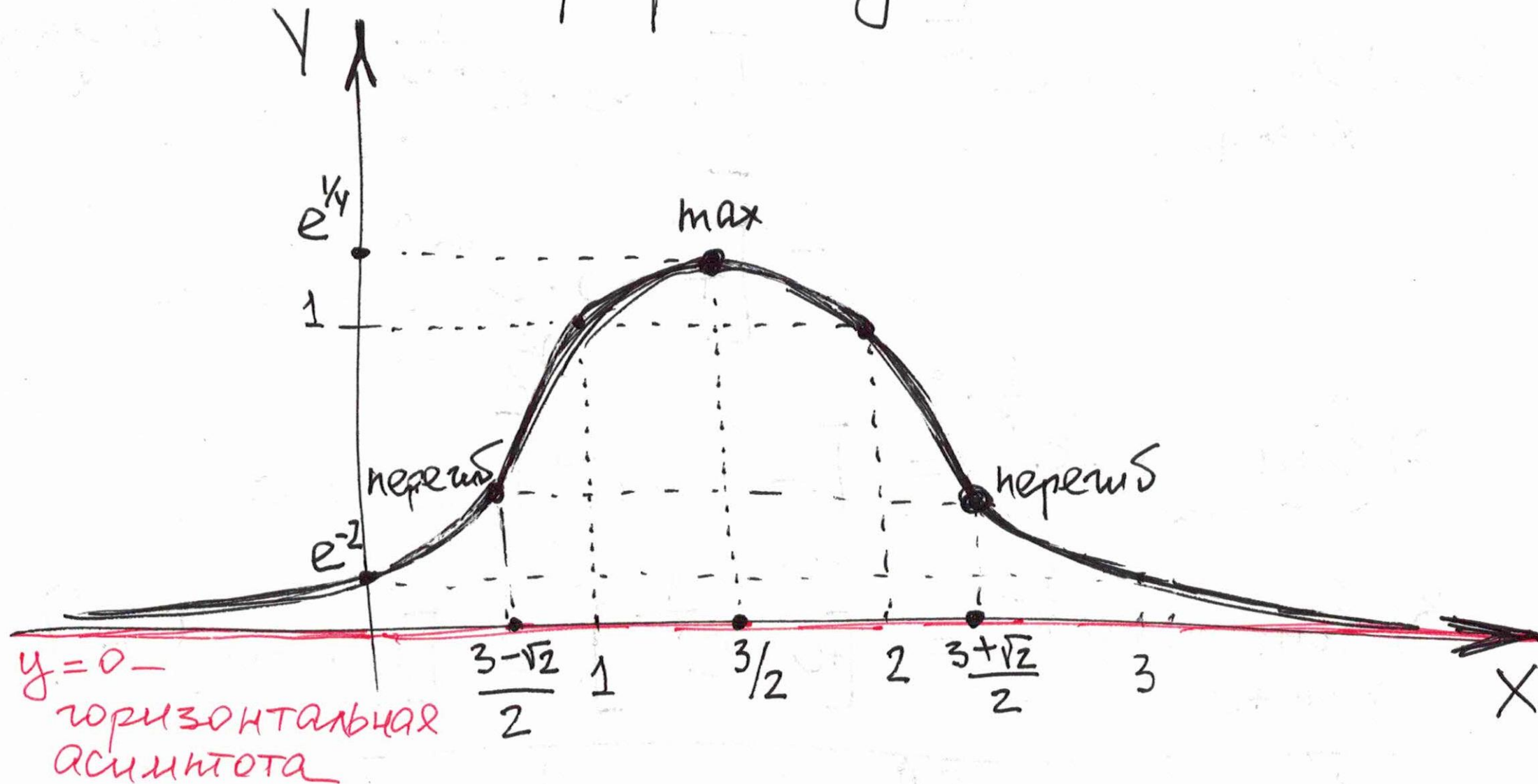
$$y'' = 0 \Leftrightarrow (-2x+3)^2 = 2$$

$$3-2x = \pm\sqrt{2} \qquad 2x = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$$



Окончательный график $y = e^{-x^2 + 3x - 2}$



③ Построить график функции:

$$y = x e^{1/x}$$

I.

1. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

2. $y \in (-\infty; +\infty)$

3. $y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin \text{OZ} \Rightarrow \emptyset$

4. $y(-x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \neq -y(x) \neq y(x) \Rightarrow$ нет симметрии (ф-ция общего вида)

5. Не периодическая.

$$6.1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[+\infty \cdot e^{\frac{1}{+\infty}} \right] =$$

$$= \left[+\infty \cdot \cancel{e^{+0}}^1 \right] = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[-\infty \cdot e^{-0} \right] = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[+0 \cdot e^{+\infty} \right] = \left[0 \cdot \infty \right] = ???$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{1/x}}{1/x} \stackrel{n.l.}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{1/x} \cdot (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{1/x} =$$

$$= +\infty$$

$$(e^{1/x})' = e^{1/x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[-0 \cdot e^{\left(\frac{1}{-0}\right)^{-\infty}} \right] = -0$$

7. Наклонные асимптоты есть? $y = kx + b$

$$1) k_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0} = 1$$

$$2) b_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(e^{1/x} - 1) = [\infty \cdot 0] = ???$$

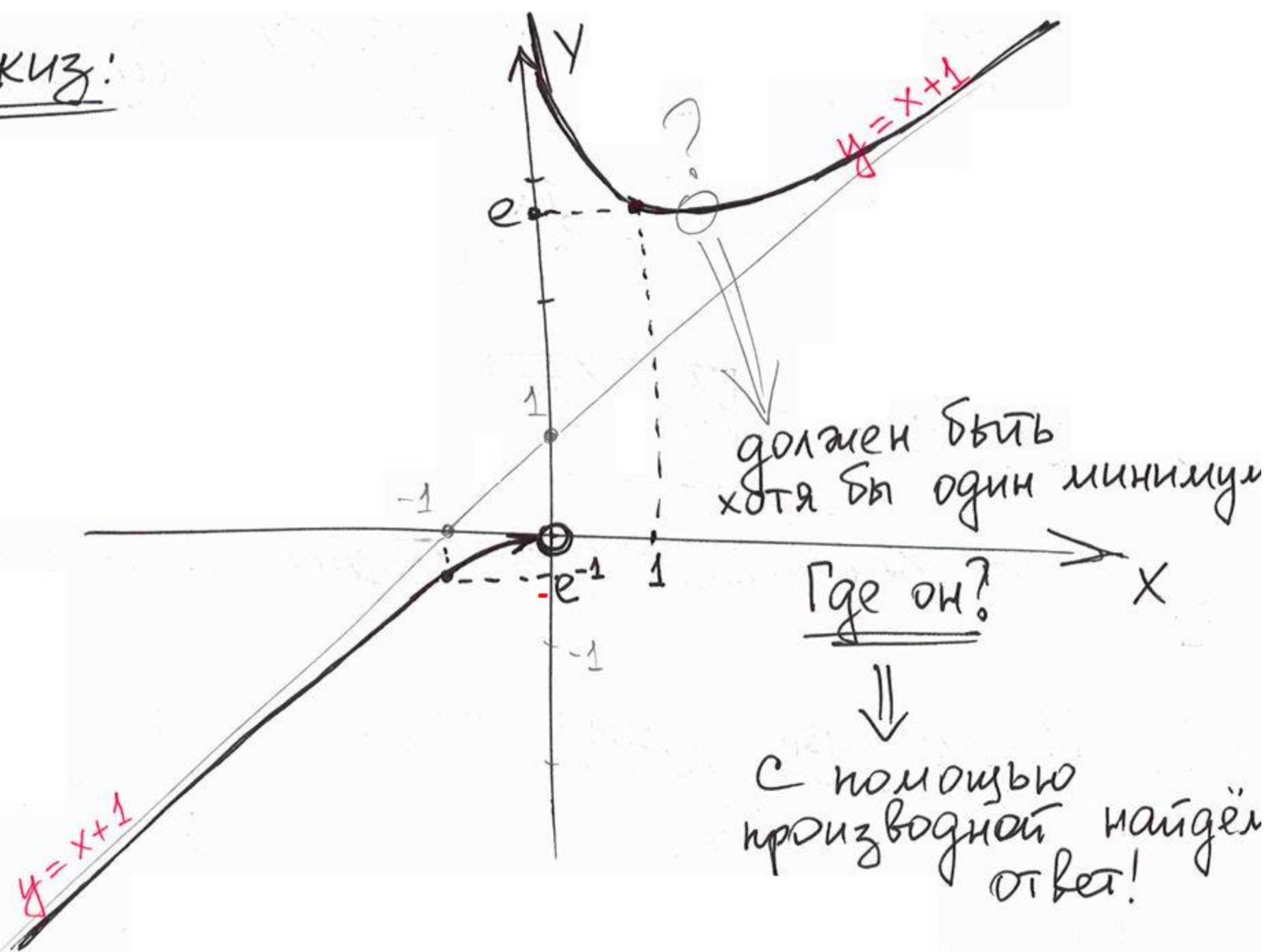
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} \stackrel{\text{п.л.}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{1/x} \cdot (1/x)'}{(1/x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0} = 1$$

$\Rightarrow \exists$ наклонная асимптота

$$y = x + 1$$

Эскиз:

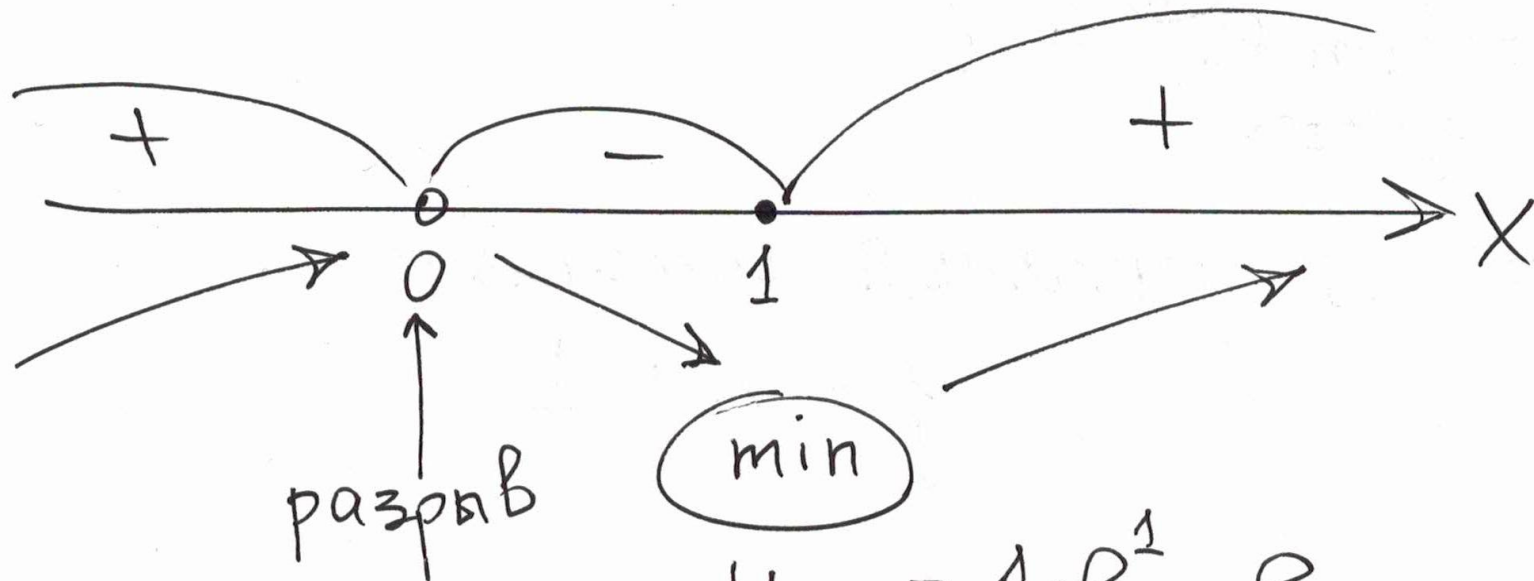


II. $y' = (x \cdot e^{1/x})'$ $(uv)' = u'v + v'u$

$$= e^{1/x} + x \cdot e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

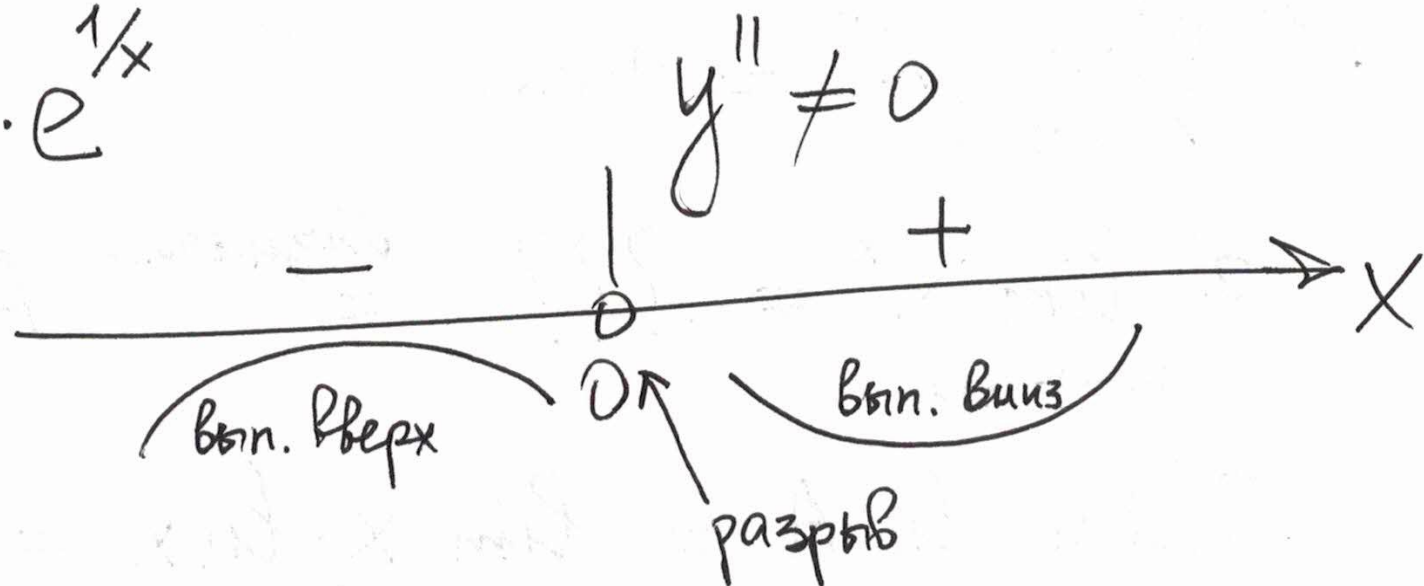
$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



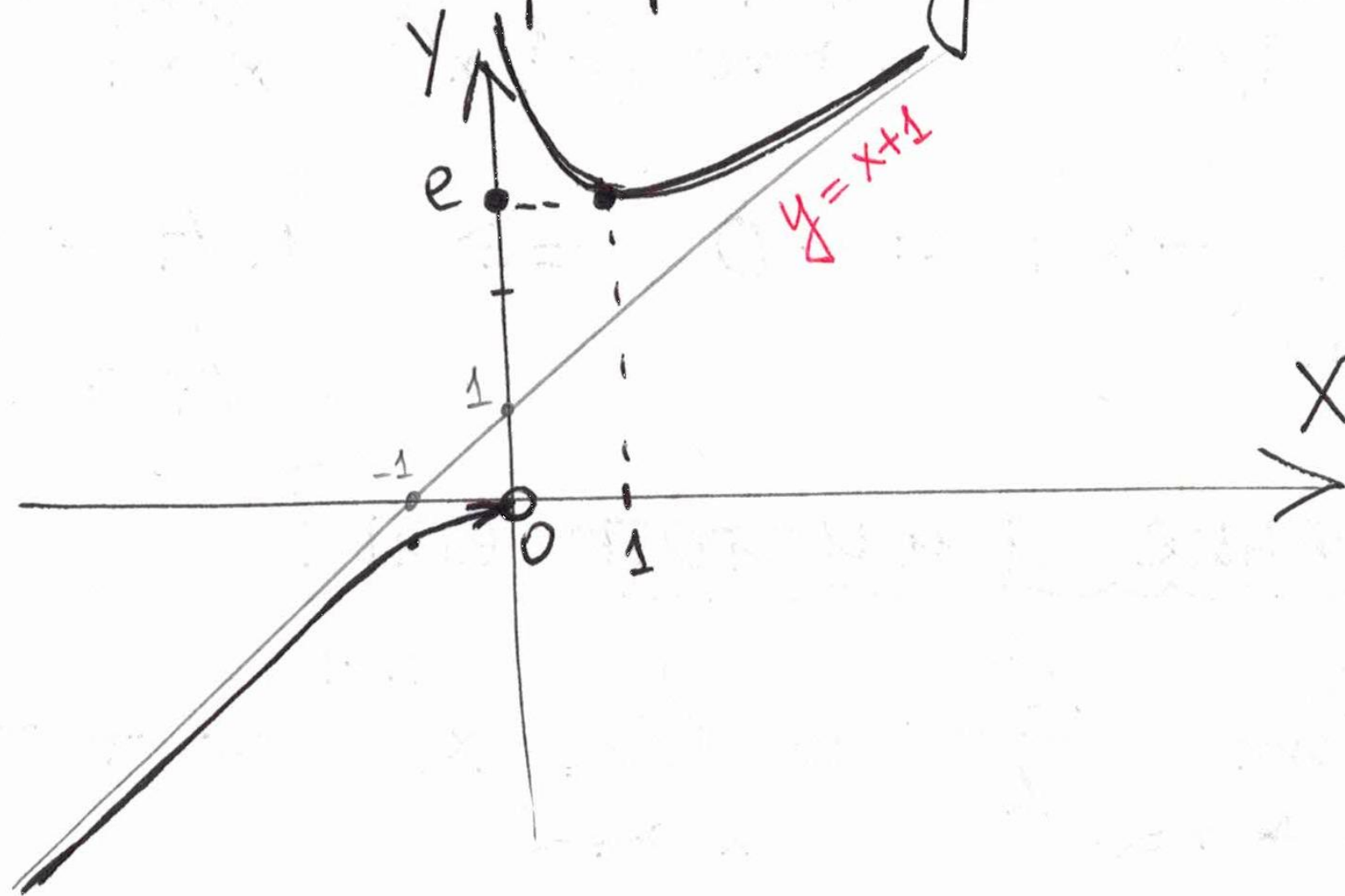
$$y_{\min} = 1 \cdot e^1 = e$$

$$\begin{aligned}
 \text{III. } y'' &= \left(e^{1/x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right)' = \left(e^{1/x} \right)' \cdot \left(\frac{x-1}{x} \right) + \\
 &+ \left(1 - \frac{1}{x} \right)' \cdot e^{1/x} = \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot e^{1/x} \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \\
 &+ \frac{1}{x^2} \cdot e^{1/x} = e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 1 + 1 \right) = \\
 &= \frac{1}{x^3} \cdot e^{1/x}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ и меем



Окончательный график $y = x \cdot e^{1/x}$



④ Построить график функции
 $y = x^x$.

① 1. ОДЗ: $x > 0$ 2. $y > 0$

3. Точек пересечения с осями нет.

4. Ф-ция общего вида. 5. Не периодическая

6. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^x = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = ???$ обозначим A

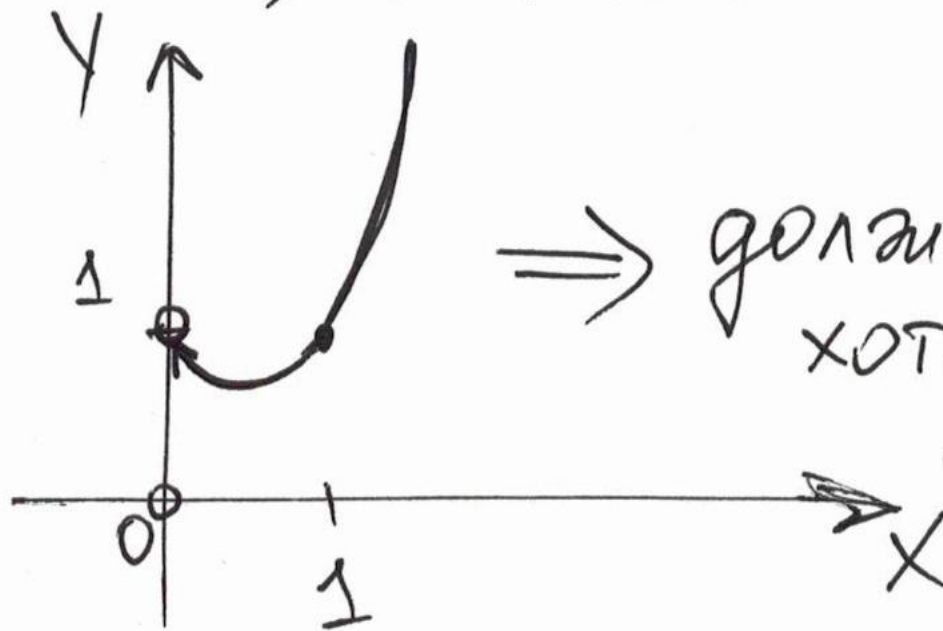
Рассм. $\ln A = \lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x = [0 \cdot (-\infty)] =$
 $= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} \stackrel{\text{п.л.}}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{(-1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{-x}$
 $= \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = -0 \Rightarrow \ln A = 0$
 $A = e^0 = 1$
(снизу)

7. Наклонные асимптоты есть?

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{x-1} = +\infty$$

$\Rightarrow$ нет наклонных асимптот.

Эскиз:



$\Rightarrow$ должны быть где-то
хотя бы один
минимум!!!

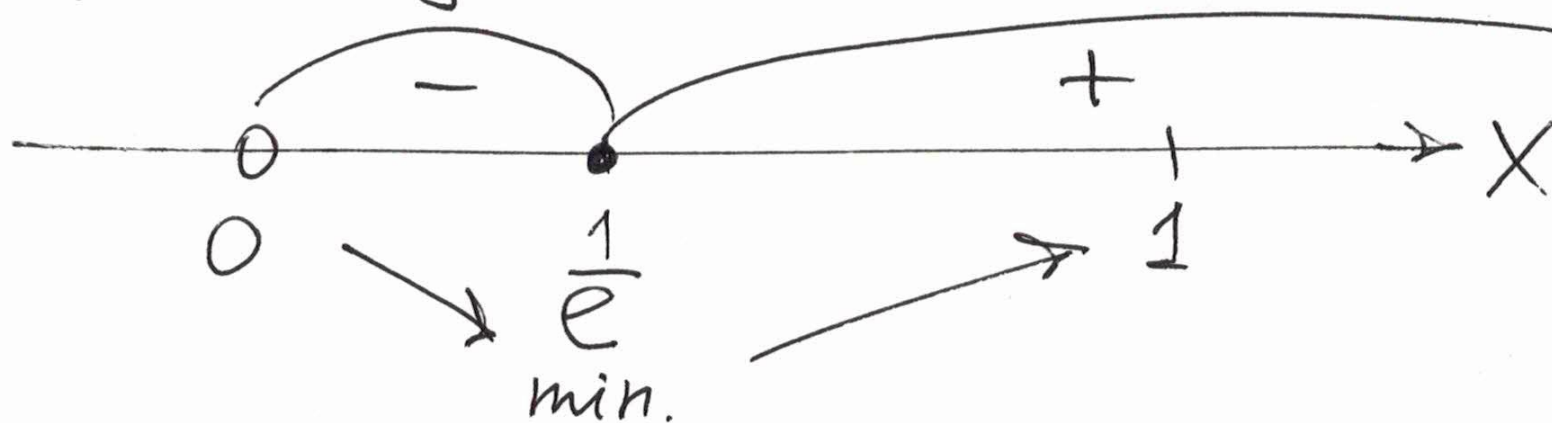
$$\textcircled{\text{II}} \quad y' = (x^x)' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

где
было

$$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$y_{\min} = y\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx \sqrt[3]{\frac{1}{3}} < 1$$



$$\begin{aligned}
 \textcircled{\text{III}} \quad y'' &= \left(x^x \cdot (\ln x + 1) \right)' = \\
 &= (x^x)' \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x} = \\
 &= x^x \cdot (\ln x + 1)^2 + x^{x-1} = x^{x-1} \cdot (x(\ln x + 1)^2 + 1)
 \end{aligned}$$

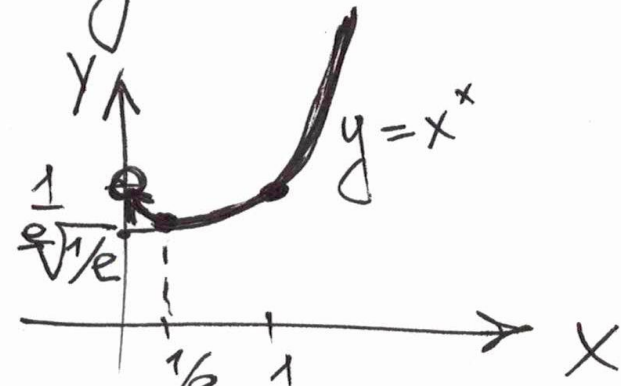
$$1) x^{x-1} > 0 \quad \forall x > 0$$

$$2) x \cdot (\ln x + 1)^2 > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow$$

$$x(\ln x + 1)^2 + 1 > 1 > 0 \Rightarrow y'' > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

$\Rightarrow$ точек перегиба нет.

Окончательный график:



Дома:

1. 5.25, 5.32, 5.37, 5.46, 5.53,
5.56, 5.63 - 5.65, 5.69, 5.75.

2. 5.82 - 84, 5.87, 5.91, 5.92.

3. 5.464, 5.475, 5.478, 5.486,
5.489, 5.499, 5.501, 5.508,
5.513, 5.514, 5.521.