ПРОИЗВОДНАЯ

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a \qquad \left(e^x\right)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Для любых двух дифференцируемых функций на области определения верно:

1. $(c)' = 0$
2. $(u+v)' = u' + v'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

5. Производная сложной функции ***y =f(g(x))*** вычисляется в соответствии с формулой

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Производная сложной функции.

Пусть есть сложная функция:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad, \text{ т.е. } z = g(f(x))$$

$$y = f(x) \text{ и } z = g(y)$$

Тогда если $\exists\ f'(x)$ и $g'(y)$, то

$$\boxed{\exists\ z'_x = g'_y(y(x)) \cdot f'(x)}$$

Примеры: 1 $y = e^{\sqrt{\ln(2x^2-3x+1)}}$

1) $y = e^t \Rightarrow y'_t = e^t$

2) $y = \sqrt{t} \Rightarrow y'_t = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$$\boxed{\begin{gathered} y = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ y'_t = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \end{gathered}}$$

3) $y = \ln t \Rightarrow y'_t = \frac{1}{t}$

$$y' = \frac{1}{t(x)} \cdot t'(x)$$

$$\Rightarrow y' = e^{\sqrt{\ln(2x^2-3x+1)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(2x^2-3x+1)}} \cdot \frac{1}{(2x^2-3x+1)} \cdot \frac{(4x-3}{1}$$

Логарифмическая производная

Примеры: 1 $y = x^x$. Найти y'.

$y' \neq x \cdot x^{x-1}$, хотя $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$y' \neq x^x \cdot \ln x$, хотя $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

Правильное решение:

1. $\ln y = \ln(x^x) = x \cdot \ln x$

$\ln(a^b) = b \cdot \ln|a|$

2. $(\underbrace{\ln y}_{\text{сложная ф-ция}})' = (\underbrace{x \cdot \ln x}_{\text{произведение простых ф-ций}})'$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\frac{1}{y} \cdot y' = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \quad \Big| \cdot y$

3. $y' = (\ln x + 1) \cdot x^x$ — Ответ.

(2) $\boxed{y = x^{x^x}}$, найти y'.

1. $\ln y = x^x \cdot \ln x$

2. $\dfrac{y'}{y} = (x^x)' \cdot \ln x + x^x \cdot \dfrac{1}{x} =$ (из примера (1))

$= x^x \cdot (\ln x + 1) \cdot \ln x + x^{x-1} =$

$= x^{x-1} \cdot (x \ln^2 x + x \ln x + 1) \quad \Big| \cdot y$

$\Rightarrow$ Ответ: $y' = x^{x^x} \cdot x^{x-1} \cdot (x \ln^2 x + x \ln x + 1)$

3

$$y = \sqrt{\frac{x^2(x-4)}{3x-2}}$$ Найти y'.

1. $\ln y = \ln\left(\frac{x^2(x-4)}{3x-2}\right)^{1/2} =$ свойства логарифмов

$$= \frac{1}{2}\left(2\ln|x| + \ln|x-4| - \ln|3x-2|\right)$$

$$(\ln|x|)' = \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0 \\ (\ln x)' = \frac{1}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ (\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \end{cases} \end{array}\right. = \frac{1}{x}$$

2. $$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} - \frac{3}{3x-2}\right) =$$

$$= \frac{2(x-4)(3x-2) + x(3x-2) - 3x(x-4)}{2x(x-4)(3x-2)} =$$

$3x^2 - 14x + 8$

$$= \frac{6x^2 - 18x + 16}{2x(x-4)(3x-2)} = \frac{3x^2-9x+8}{x(x-4)(3x-2)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3x^2-9x+8}{x(x-4)(3x-2)} \cdot \sqrt{\frac{x^2(x-4)}{3x-2}} = \left(\sqrt{x^2} = |x|\right)$$

$$= \frac{|x|}{x} \cdot \frac{3x^2-9x+8}{\sqrt{x-4}\cdot(3x-2)^{3/2}}$$ — Ответ.

План исследования ф-ции $y = f(x)$ для построения графика.

I. Расскажем про $y = f(x)$ всё, что можно, БЕЗ производной:

1. Область определения
2. Область значений
3. Точки пересечения с осями координат.

а) $OX: \ y = 0 \Rightarrow x = $ (решаем уравнение $f(x) = 0$)

б) $OY: \ x = 0 \Rightarrow y = f(0)$

4. Четность: а) если $f(-x) = f(x)$, то ф-ция чётная ⇒ график симметричен отн. OY;

б) если $f(-x) = -f(x)$, то ф-ция нечётная ⇒ график симметричен центрально отн. начала координат.

5. Периодичность.

6. Поведение на концах области определения:

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

б) Левосторонние и правосторонние пределы в окрестности особых точек (конечных).

7. Асимптоты есть?

8. Эскиз.

Асимптоты бывают разные!

(прямые, к которым стремится график ф-ции)

1. **Вертикальные**, если $\exists$ точка разрыва области определения $\boxed{x = a}$ и

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

2. **Горизонтальные**:

а) если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = C$ ($\equiv$ const), то

при $x \to +\infty$ график $\to$ к прямой $\boxed{y = C}$

б) если $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = d$ ($\equiv$ const), то

при $x \to -\infty$ график $\to$ к прямой $\boxed{y = d}$

③ Наклонные асимптоты на $+\infty$ и $-\infty$ могут быть разными $\Rightarrow$ нужно рассматривать два случая а) и б). (как в ②)

$y = kx + b$

$(*)\ f(x) \sim kx + b$ — уравнение любой прямой

$\Rightarrow$ надо найти k и b.

1) сначала ищем k: в $(*)$ пренебрегаем b

$$\Rightarrow k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{а) } k = 0 \Rightarrow \text{горизонт. асимптота} \\ \text{б) } k = \infty \Rightarrow \text{асимптот нет} \\ \text{в) } k \equiv \text{const и мы её нашли} \Rightarrow \text{может } \exists \text{ наклонн. асимптота} \end{array}\right.$$

2) ищем b из $(*)$:

подставили

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \ldots \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \infty \Rightarrow \text{нет асимп} \\ b \equiv \text{const} \Rightarrow \text{есть} \end{array}\right.$$

Примеры

1 Построить график ф-ции

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$$

I. 1. Область определения:

делить на 0 нельзя $\Rightarrow$ $x \neq \pm 1$

$\Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

$\Rightarrow$ у области определения 6 концов

$\Rightarrow$ позже нужно вычислить 6 пределов

2. Область значений: $y \in \mathbb{R}$.

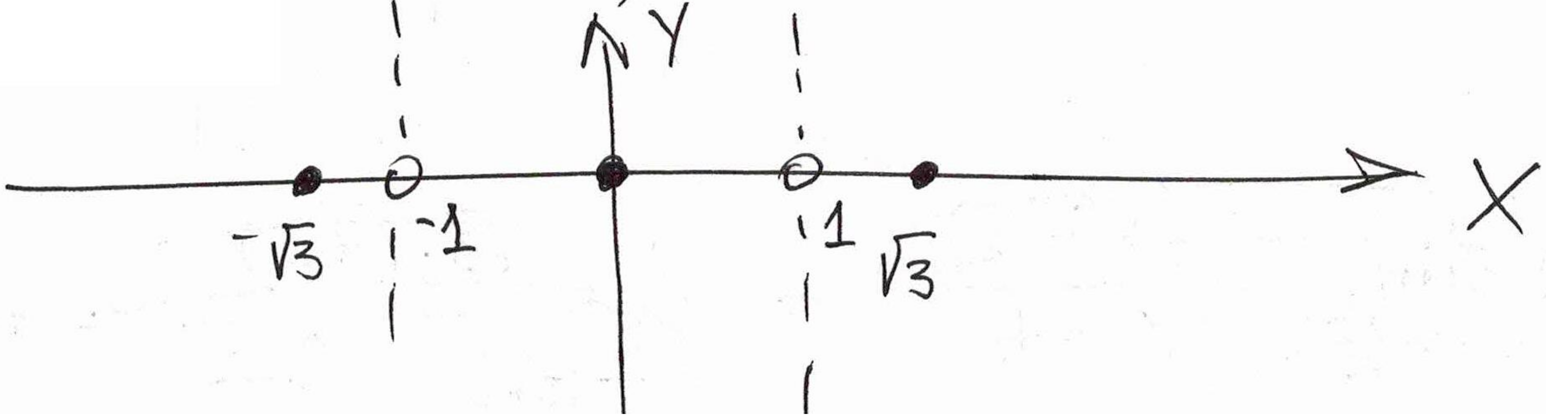
3. Точки пересечения с осями координат:

OY: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{0}{-1} = 0$

OX: $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3) = 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \exists$ три точки пересечения с OX:

$x = 0$; $x = -\sqrt{3}$; $x = \sqrt{3}$



4. Четность: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3 - 3(-x)}{(-x)^2 - 1} =$

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{-x^3 + 3x}{x^2 - 1} =$$

$$= -\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

$\Rightarrow$ заданная ф-ция нечетная

$\Rightarrow$ график будет центрально симметричен относительно $(0;0)$.

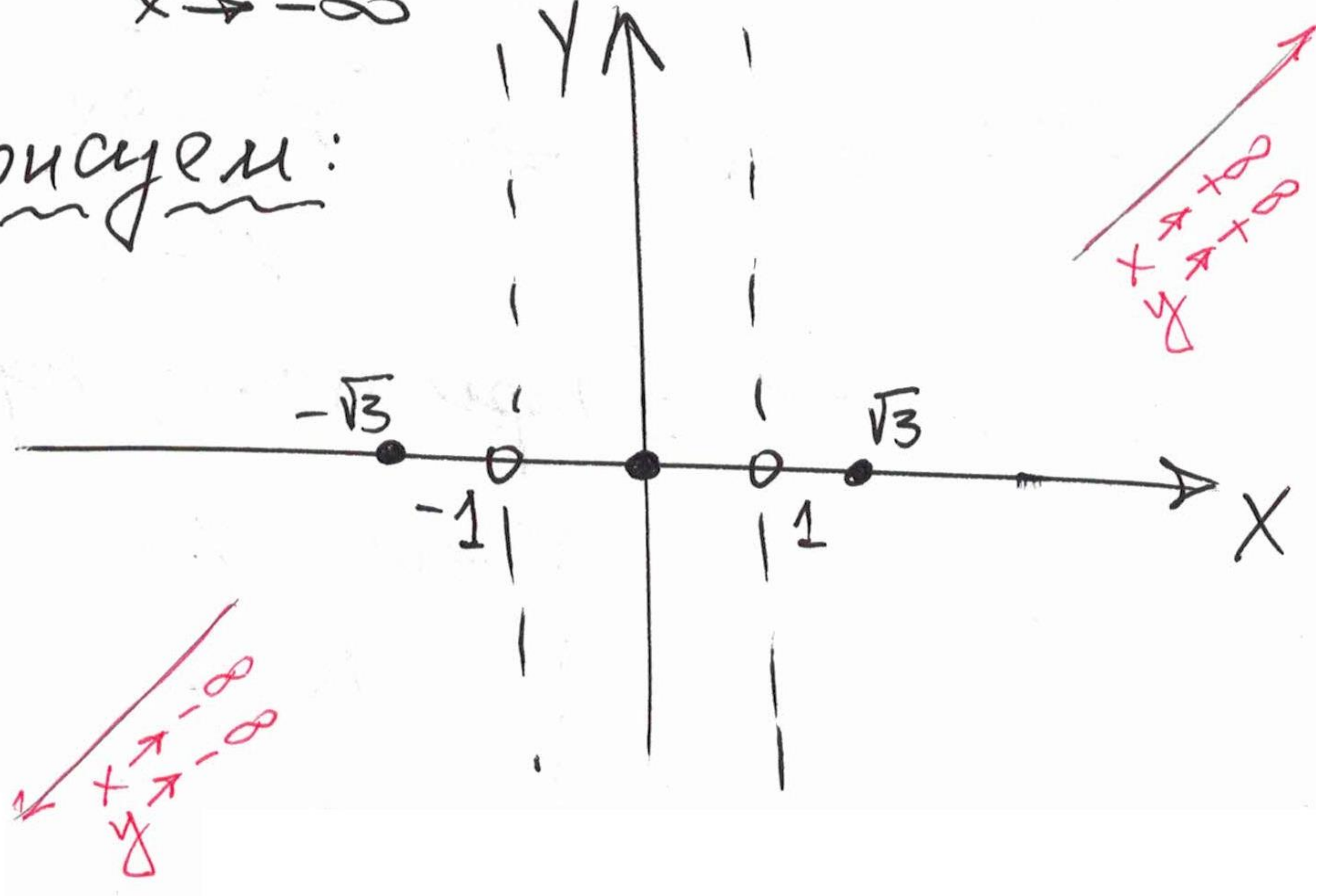
5. Не периодическая.

6. Поведение на концах области определения:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

Нарисуем:



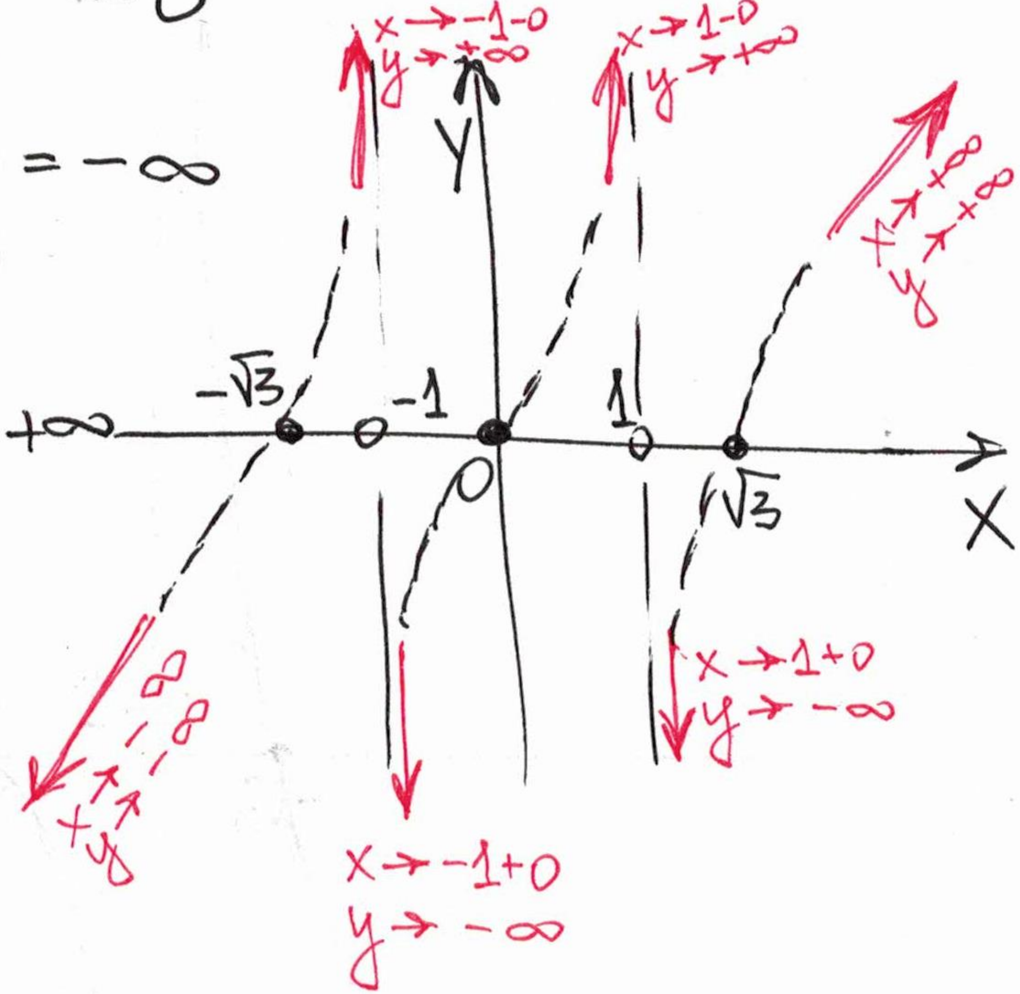
3) а) $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x(x^2-3)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1\cdot(-2)}{+0} = -\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x(x^2-3)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1\cdot(-2)}{-0} = +\infty$

4) а) $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{x(x^2-3)}{x^2-1} = \left[\dfrac{(-1)\cdot(-2)}{(-0)}\right] = -\infty$

б) $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{x(x^2-3)}{x^2-1} = \left[\dfrac{(-1)\cdot(-2)}{+0}\right] = +\infty$

$\Longrightarrow$ ~~Эскиз~~ почти Эскиз:



7. <u>Асимптоты:</u>

1. Вертикальные есть (см. раньше п. 6 (3-4))

$$x = \pm 1$$

2. Горизонтальных нет (п. 6 (1-2)).

3. Наклонные — ? $\Rightarrow$ $y = kx + b$

1) $k_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x}{x(x^2-1)} = 1$

$k_- = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x}{x^3 - x} = 1$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx\right)$$

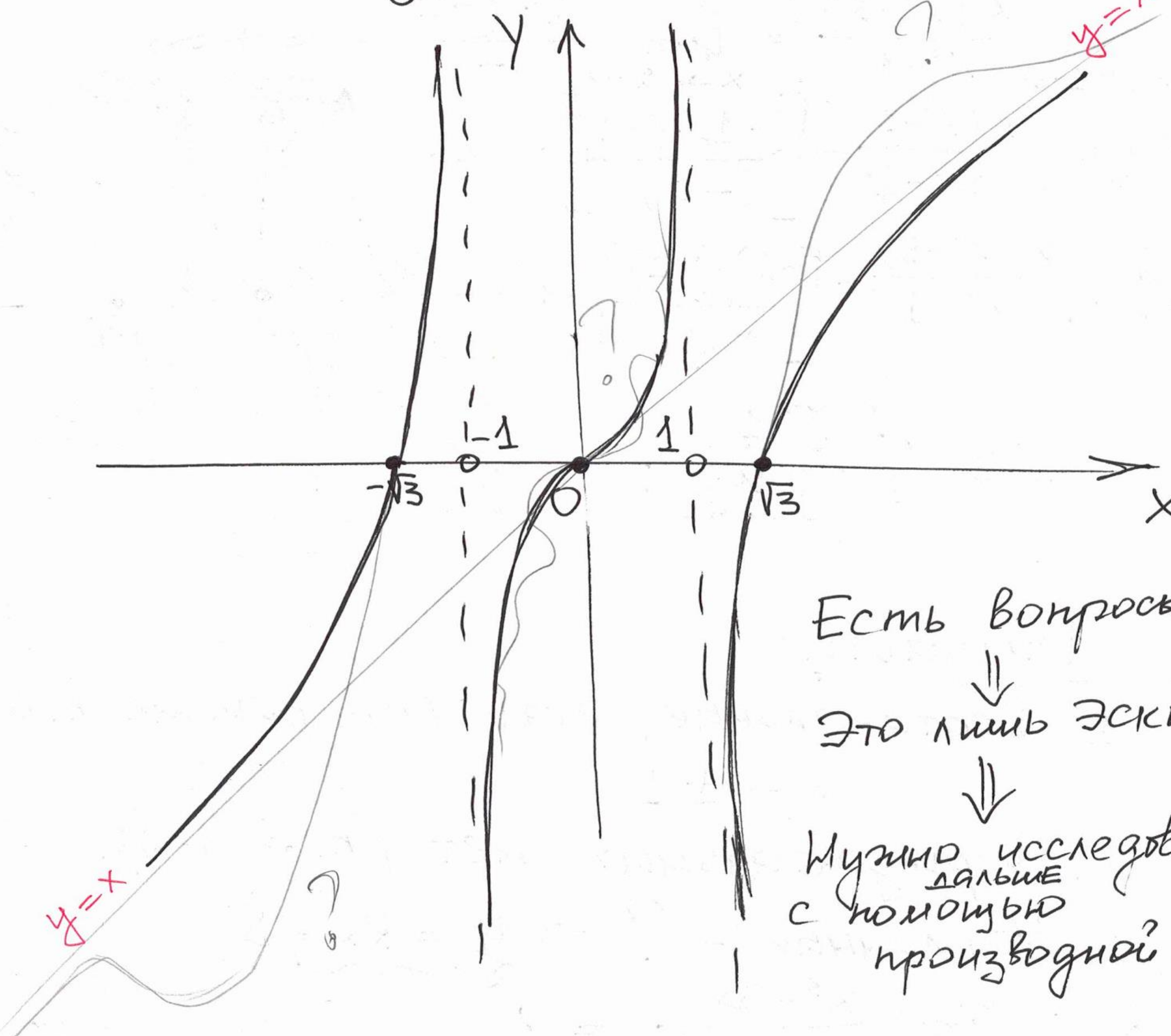
2) $b_\pm = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^3 - 3x}{x^2-1} - x\right) =$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-3x + x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-2x}{x^2-1} = 0$

$\Rightarrow \exists$ наклонная асимптота $y = x$

8. Эскиз:

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$$



Есть вопросы!

$\Downarrow$

Это лишь эскиз!

$\Downarrow$

Нужно исследовать дальше с помощью производной!!!

II С помощью первой производной находят экстремумы и участки возрастания-убывания функции:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$y' = \left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}\right)' = \frac{(3x^2 - 3)(x^2 - 1) - (x^3 - 3x) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + 3}{(x^2 - 1)^2}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow \varnothing$ у нас

$\Rightarrow$ экстремумов нет

$\forall x \in \mathbb{R} \quad y' > 0$

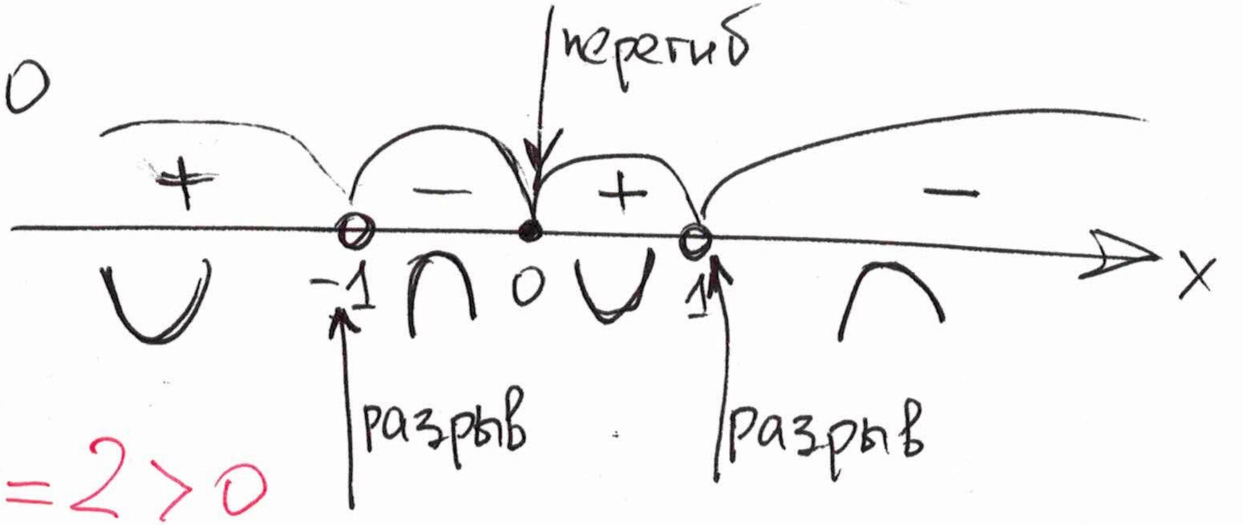
$\Rightarrow$ наша ф-ция возрастает на всей обл-ти определения.

III. С помощью <u>второй производной</u> находят <u>точки перегиба</u> и участки выпуклости ($\frown$) – вогнутости ($\smile$)

$$y'' = \left(\frac{x^4+3}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(x^2-1)^2(4x^3) - (x^4+3)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{4x\cancel{(x^2-1)}\left(x^2(x^2-1)-(x^4+3)\right)}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{-4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

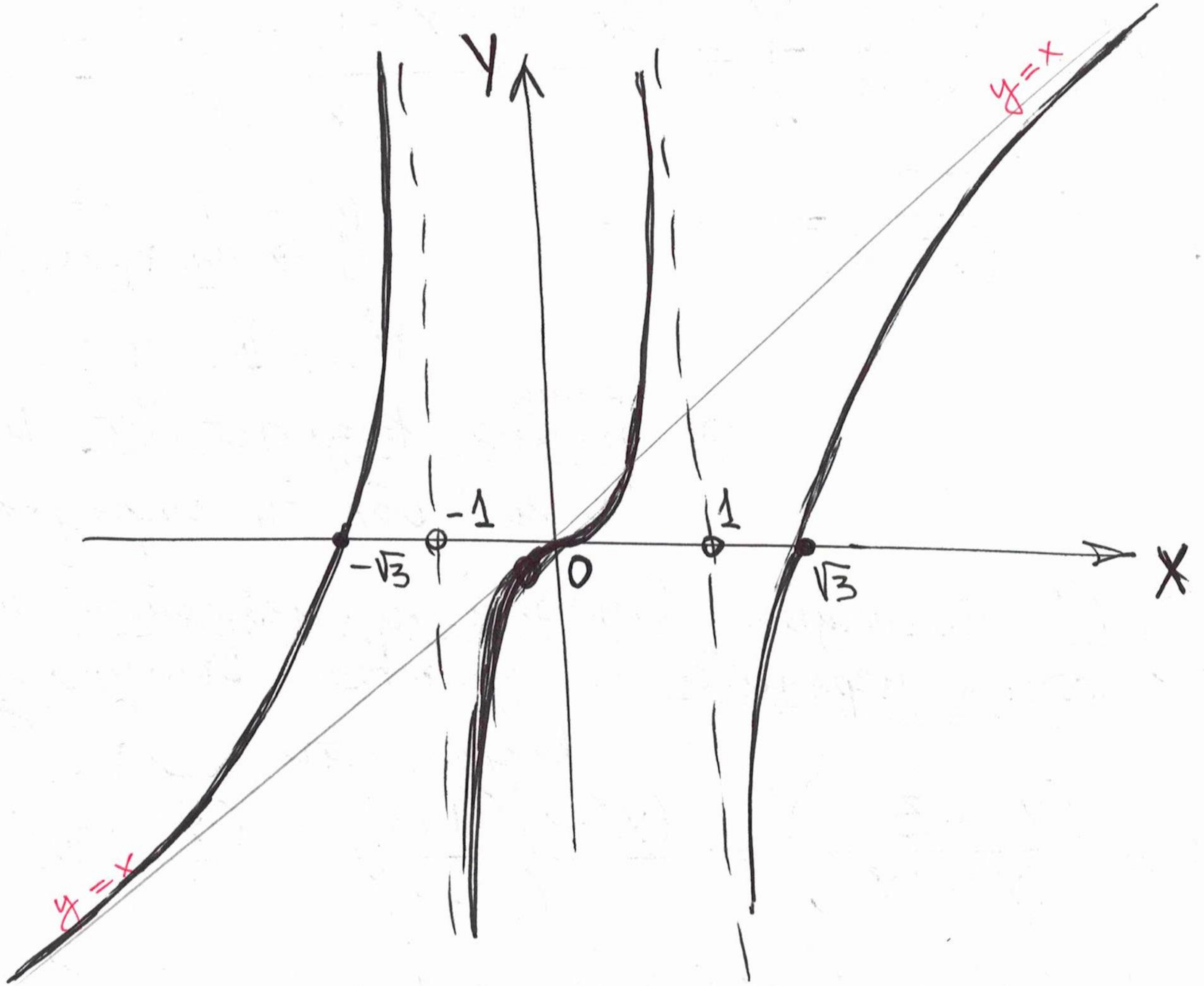
$$y''=0 \Leftrightarrow x=0$$



$$(x^2)'' = (2x)' = 2 > 0$$

$\Longrightarrow$ Окончательный вид графика:

$$y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$$



② Построить график функции

$$y = e^{-x^2+3x-2}$$

I. 1. $x \in \mathbb{R}$ 2. $y > 0$

$y = -x^2 + 3x - 2$

≡ парабола ветвями вниз

$x_{1,2} = \{1; 2\}$

$x_в = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ $y_в = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - \ldots = +\frac{1}{4}$

3. $\left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = e^{-2} \\ y = 0 \Leftrightarrow \varnothing \end{array}\right.$

4. $f(-x) = e^{-(-x)^2+3(-x)-2} = e^{-x^2-3x-2}$

$\left.\begin{array}{l} \neq f(+x) \\ \neq -f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$ ф-ция общего вида

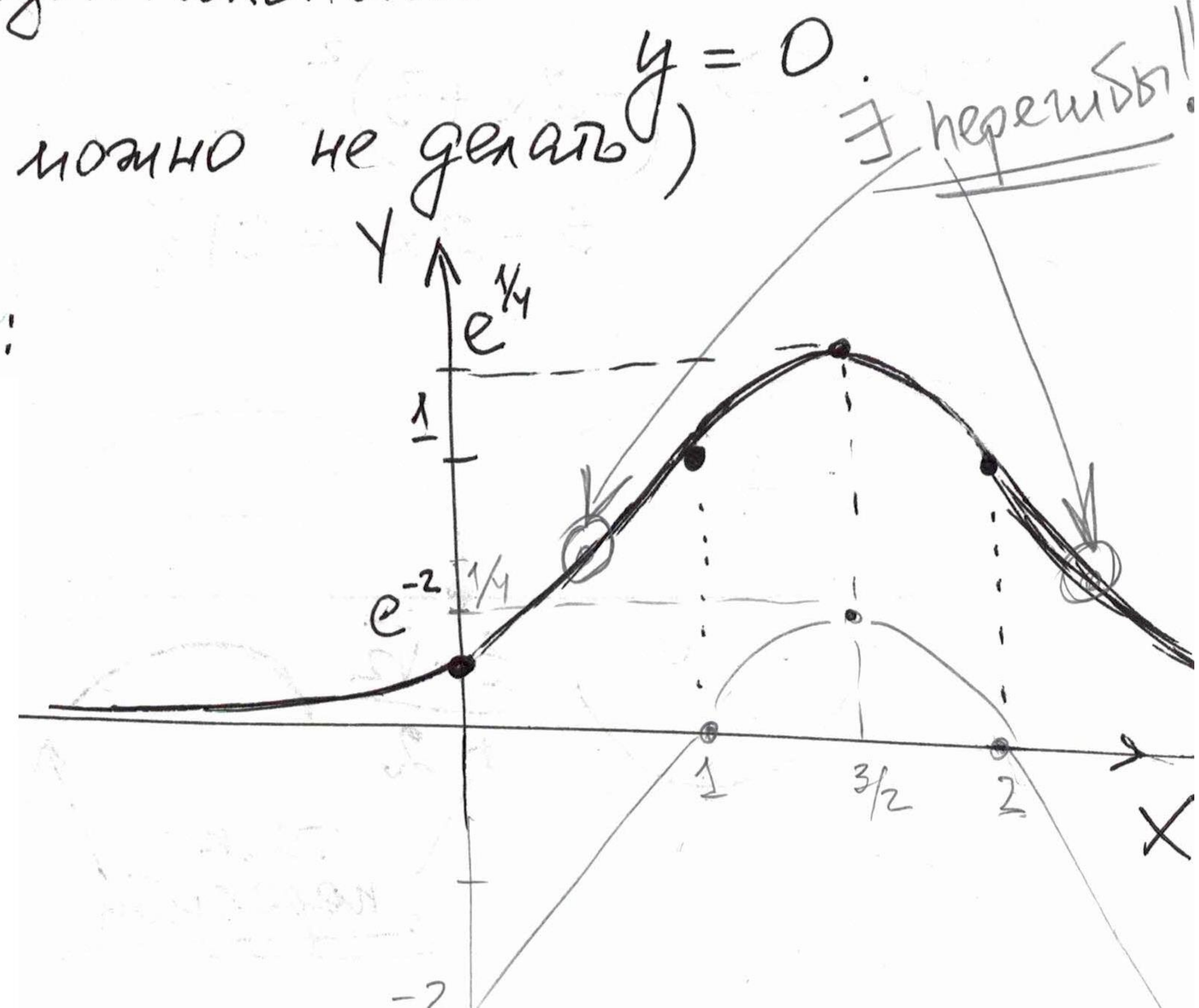
5. Не периодическая.

6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2+3x-2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = \left[e^{-\infty}\right] = +0$

$\Rightarrow \exists$ горизонтальная асимптота $y=0$.

($\Rightarrow$ п. 7 можно не делать)

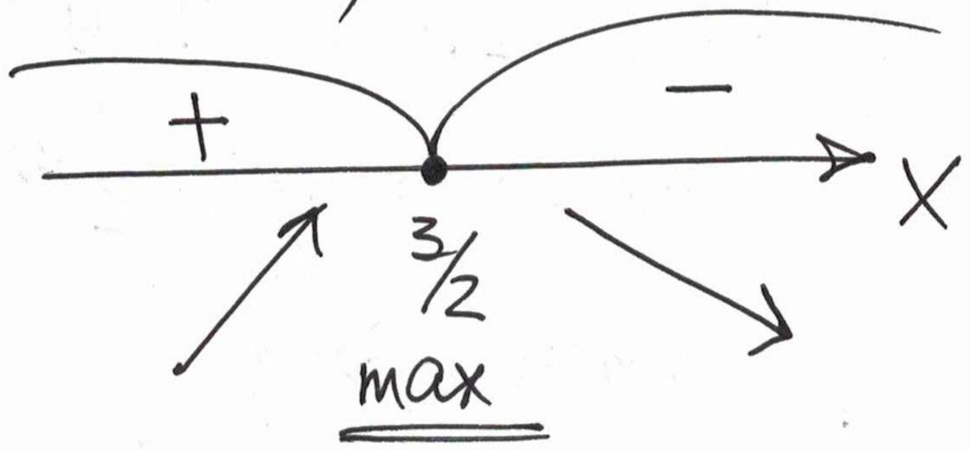
$\Rightarrow$ Эскиз:



II. $y' = \left(e^{-x^2+3x-2}\right)' =$ $\qquad (e^t)' = e^t \cdot t'$

$$= e^{-x^2+3x-2} \cdot (-2x+3)$$

$$y' = 0 \iff x = \frac{3}{2}$$



$$y\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{1}{4}}$$

III. $$y'' = \left((-2x+3)\cdot e^{-x^2+3x-2}\right)' =$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$= -2\cdot e^{-x^2+3x-2} + (-2x+3)\cdot e^{-x^2+3x-2}\cdot(-2x+3)$$

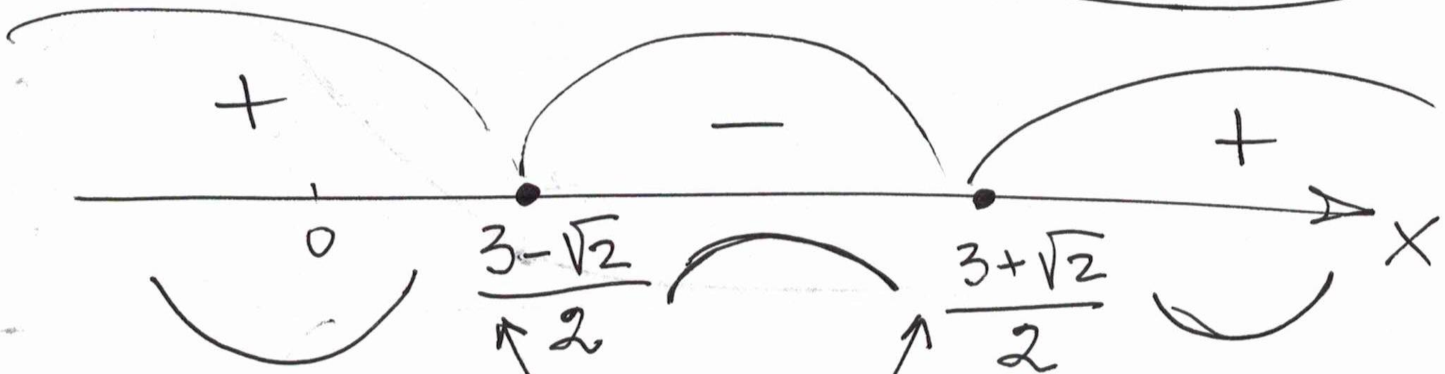
$$= \underbrace{e^{-x^2+3x-2}}_{>0}\cdot\left(\underbrace{-2+(-2x+3)^2}_{\text{парабола ветвями вверх}}\right)$$

$$y''=0 \iff (-2x+3)^2 = 2$$

$$3-2x = \pm\sqrt{2}$$

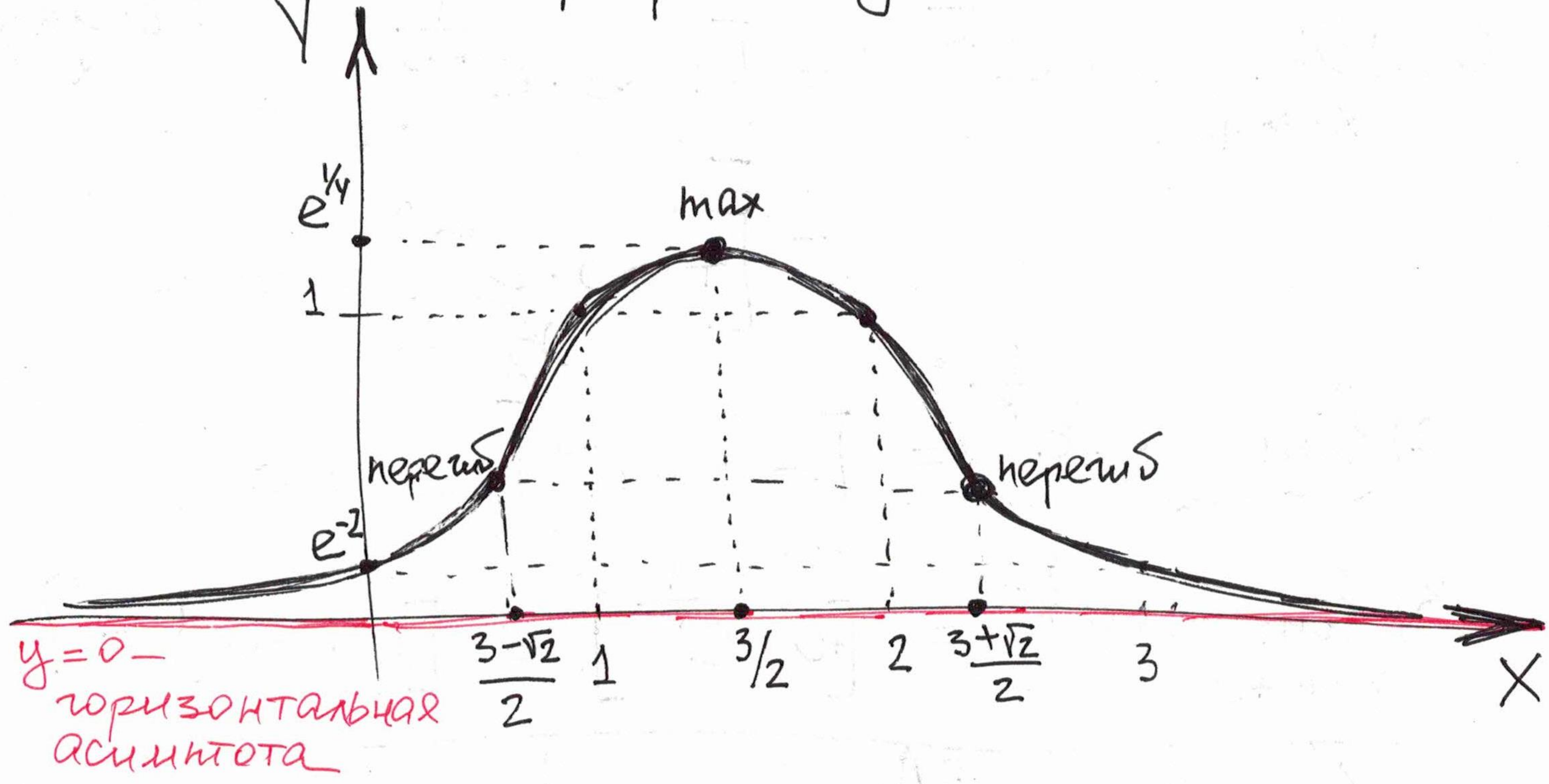
$$2x = 3\pm\sqrt{2}$$

$$x = \frac{3\pm\sqrt{2}}{2}$$



точки
перегиба

Окончательный график $y = e^{-x^2+3x-2}$



③ Построить график функции:

$$y = x e^{1/x}$$

I.

1. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
2. $y \in (-\infty; +\infty)$
3. $y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin$ ОДЗ $\Rightarrow \varnothing$
4. $y(-x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ $\left.\begin{matrix} \neq -y(x) \\ \neq y(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ нет симметрий (ф-ция общего вида)
5. Не периодическая.

6.1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[+\infty\cdot e^{\frac{1}{+\infty}}\right] =$

$= \left[+\infty\cdot \underbrace{\cancel{e^{+0}}}_{1}\right] = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[-\infty\cdot e^{-0}\right] = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+0} x\cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[+0\cdot e^{\frac{1}{+0}}\right] = \left[0\cdot\infty\right] = ???$

$= \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{e^{1/x}}{1/x} \overset{\text{п.л.}}{=} \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{e^{1/x}\cdot(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to+0} e^{1/x} =$

$= +\infty$

$\left(e^{1/x}\right)' = e^{1/x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)' = e^{1/x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

4) $\lim\limits_{x\to-0} x\cdot e^{1/x} = \left[-0\cdot e^{\overset{\to-\infty}{\left(\frac{1}{-0}\right)}}\right] = -0$

7. Наклонные асимптоты есть? $y = kx + b$

1) $k_{\pm} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{1/x \to 0} = 1$

2) $b_{\pm} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) =$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} x \left(e^{1/x} - 1 \right) = [\infty \cdot 0] = ???$

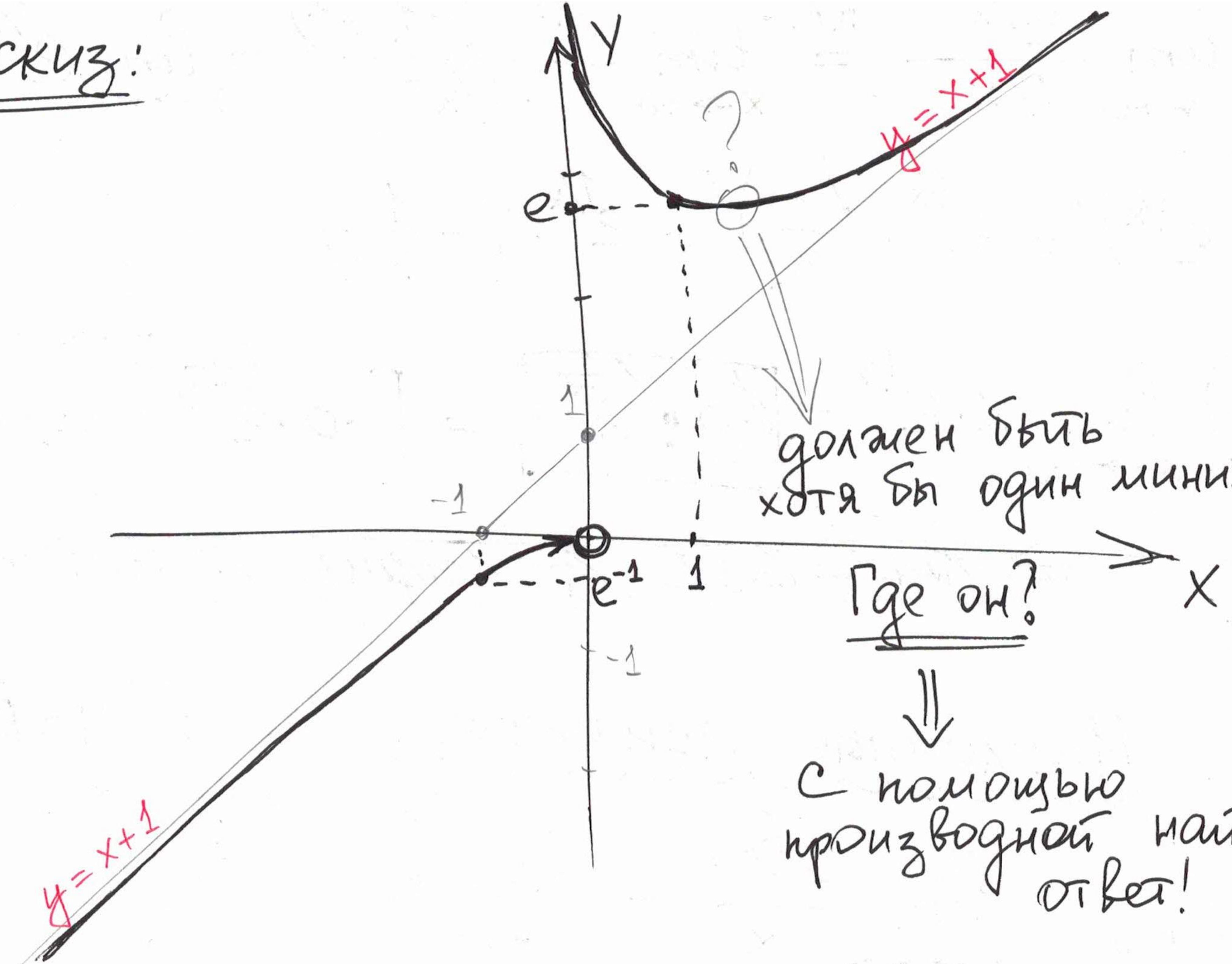
$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^{1/x} - 1}{1/x} \overset{\text{п.л.}}{=} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^{1/x} \cdot (1/x)'}{(1/x)'} =$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{1/x \to 0} = 1$

$\Rightarrow \exists$ наклонная асимптота

$y = x + 1$

Эскиз:



должен быть хотя бы один минимум

Где он?

$\Downarrow$

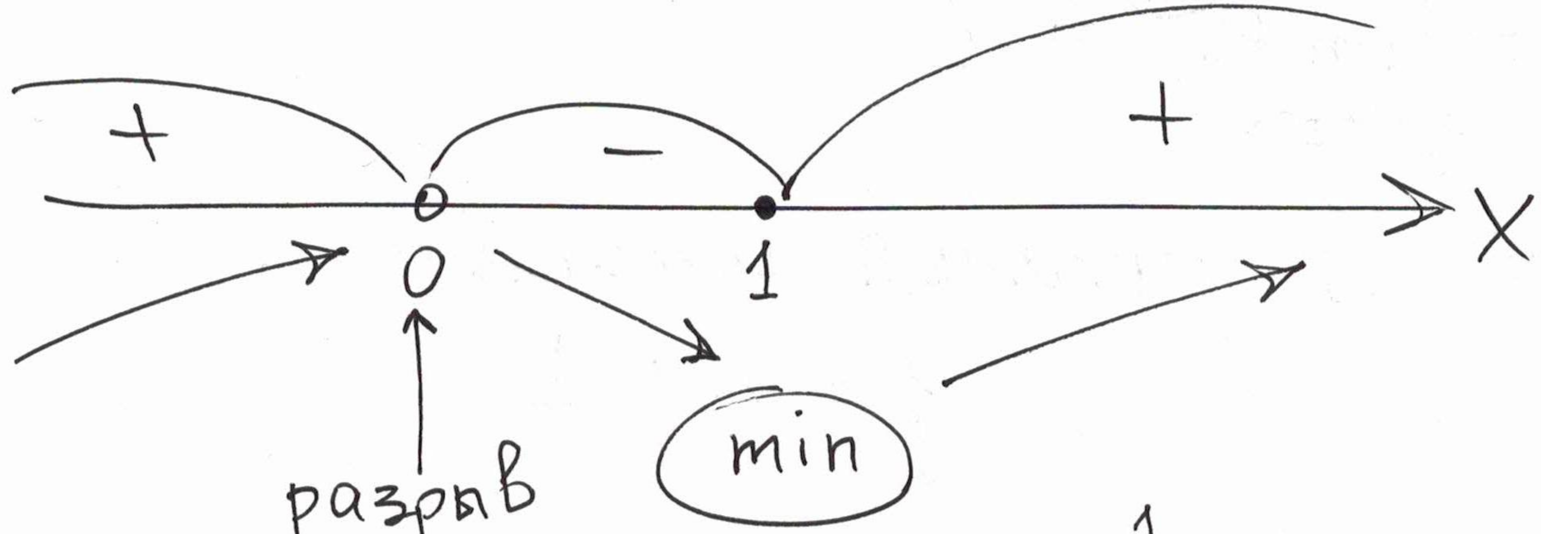
с помощью производной найдём ответ!

II. $y' = \left(x \cdot e^{1/x}\right)'$ $\qquad (uv)' = u'v + v'u$

$$= e^{1/x} + x \cdot e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$y' = 0 \iff x = 1$



$$y_{min} = 1 \cdot e^1 = e$$

III. $$y'' = \left(e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(e^{1/x}\right)'\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right) +$$

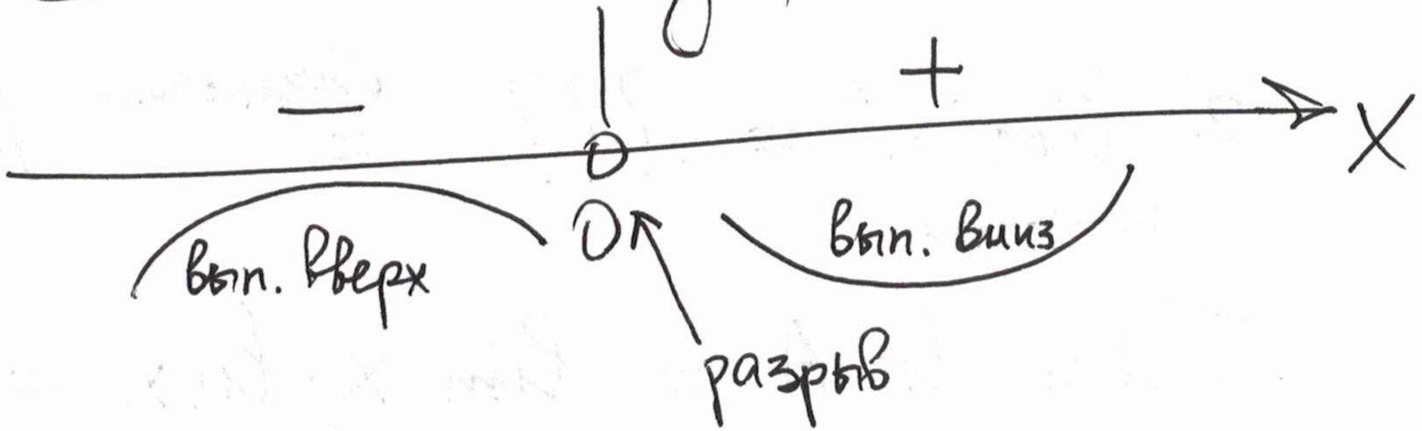
$$+ \left(1-\frac{1}{x}\right)'\cdot e^{1/x} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot e^{1/x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right) +$$

$$+ \frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x} = e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{1}{x}-1+1\right) =$$

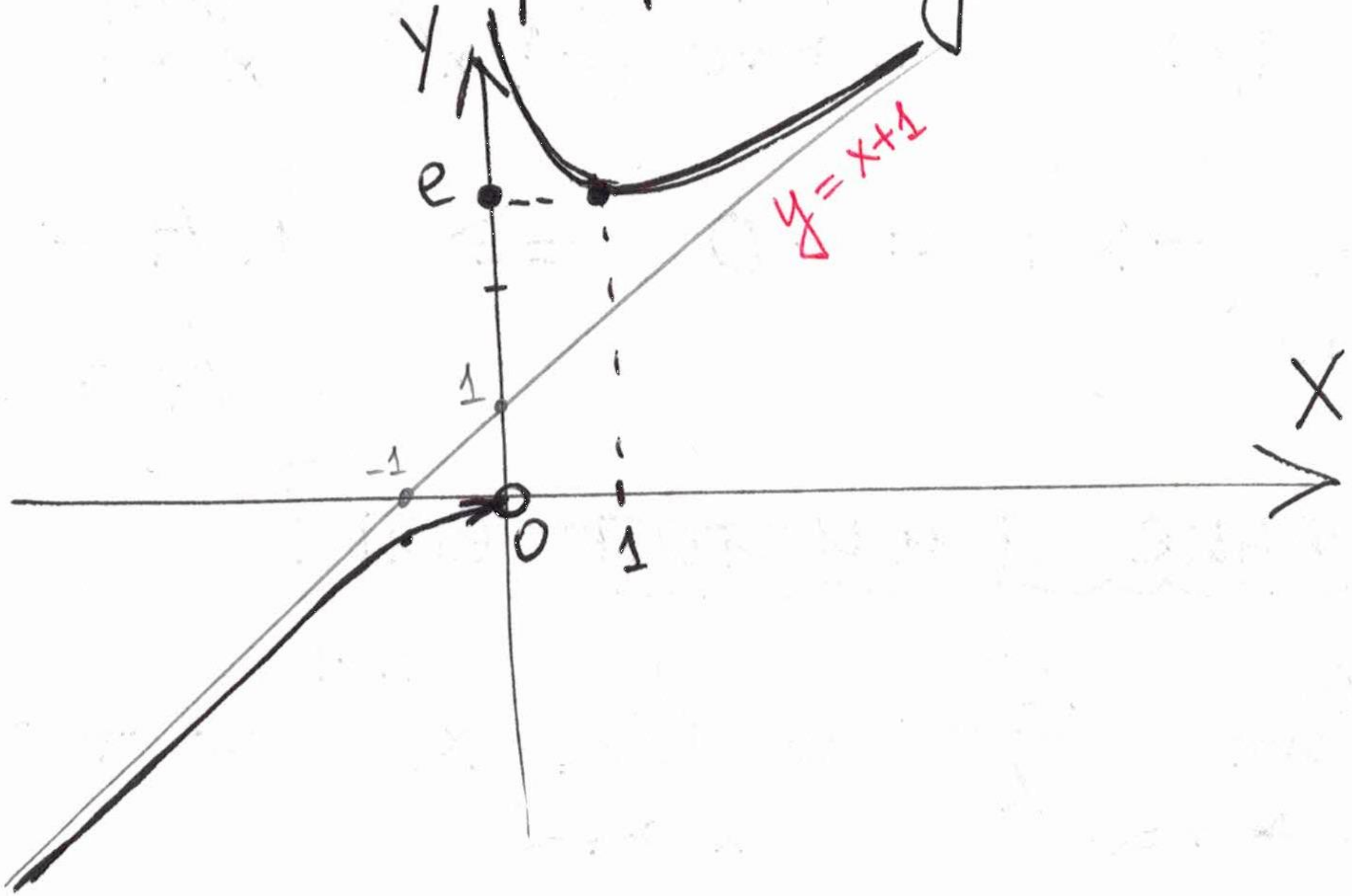
$$= \frac{1}{x^3}\cdot e^{1/x}$$

$y'' \neq 0$

$\Rightarrow$ имеем



Окончательный график $y = x \cdot e^{1/x}$



④ Построить график функции

$$y = x^x.$$

Ⅰ 1. ОДЗ: $x > 0$ 2. $y > 0$

3. Точек пересечения с осями нет.

4. Ф-ция общего вида. 5. Не периодическая

6. 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^x = +\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +0} x^x = ??? \overset{\text{обозначим}}{=} A$

Рассм. $\ln A = \lim\limits_{x \to +0} x \cdot \ln x = [0 \cdot (-\infty)] =$

$= \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\ln x}{1/x} \overset{\text{п.Л.}}{=} \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1/x}{(-1/x^2)} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{x^2}{-x}$

$= \lim\limits_{x \to +0} (-x) = -0 \Rightarrow \ln A = 0$

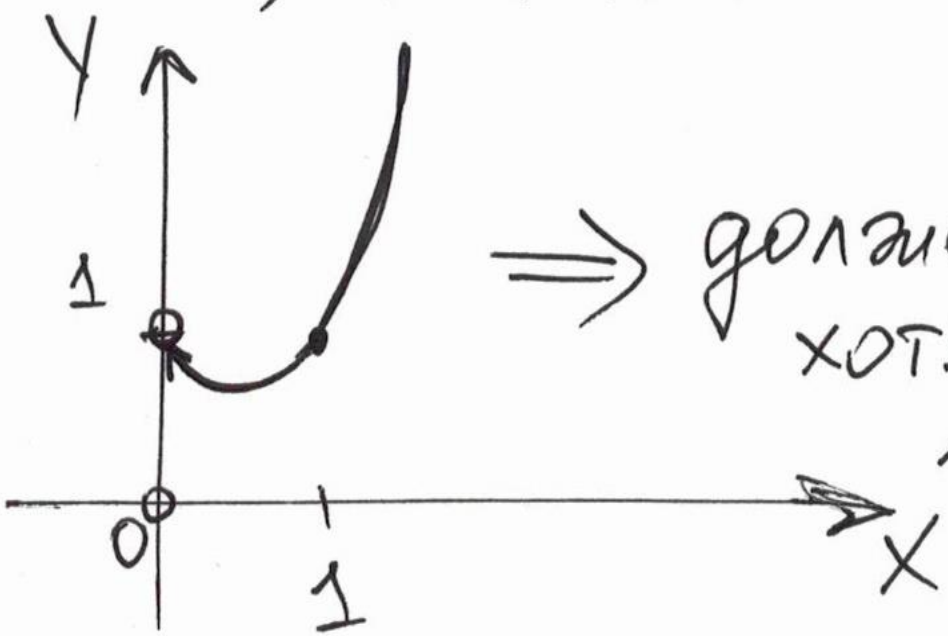
$A = e^0 = 1$ (снизу)

7. Наклонные асимптоты есть?

$$k_+ = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^{x-1} = +\infty$$

$\Longrightarrow$ нет наклонных асимптот.

Эскиз:



$\Longrightarrow$ должен быть где-то хотя бы один минимум!!!

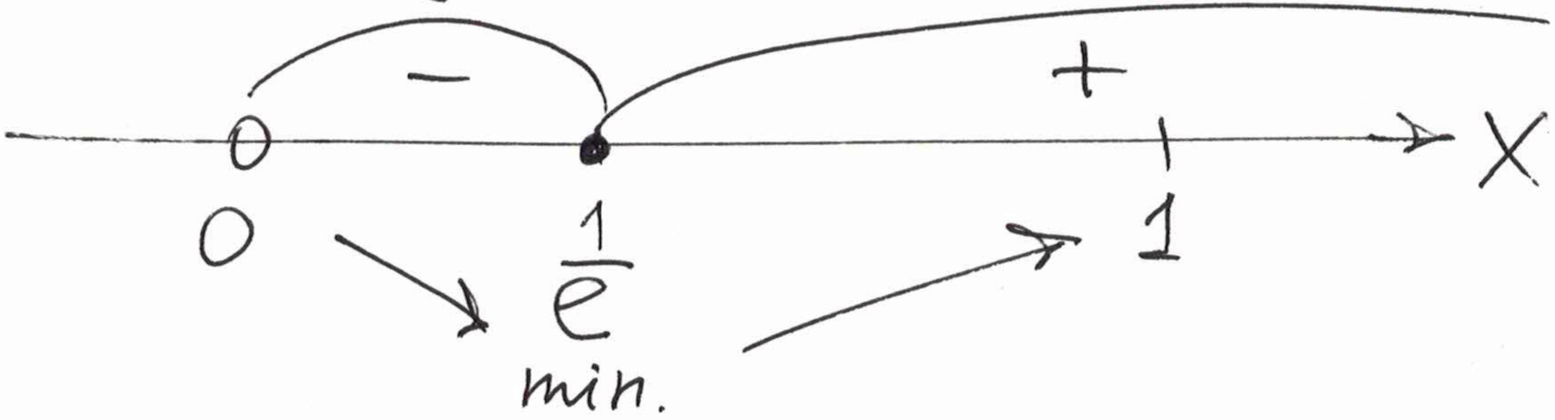
II

$$y' = \left(x^x\right)' \underset{\text{уже было}}{=} x^x \cdot \left(\ln x + 1\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$y_{min} = y\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx \sqrt[3]{\frac{1}{3}} < 1$$



III $y'' = \left(x^x \cdot (\ln x + 1)\right)' =$

$= (x^x)' \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot \dfrac{1}{x} =$

$= x^x \cdot (\ln x + 1)^2 + x^{x-1} = x^{x-1} \cdot \left(x(\ln x + 1)^2 + 1\right)$

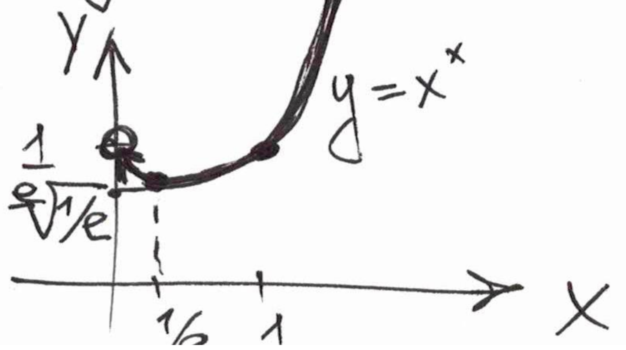
1) $x^{x-1} > 0 \quad \forall x > 0$

2) $x \cdot (\ln x + 1)^2 > 0 \quad \forall x > 0 \implies$

$x(\ln x + 1)^2 + 1 > 1 > 0 \implies y'' > 0 \quad \forall x \in$ ОДЗ

$\implies$ точек перегиба нет.

Окончательный график:



Дома:

1. 5.25, 5.32, 5.37, 5.46, 5.53, 5.56, 5.63 - 5.65, 5.69, 5.75.

2. 5.82 - 84, 5.87, 5.91, 5.92.

3. 5.464, 5.475, 5.478, 5.486, 5.489, 5.499, 5.501, 5.508, 5.513, 5.514, 5.521.