Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Декан
механико-математического факультета,

/*А.И. Шафаревич*/

21 января 2026 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ В АСПИРАНТУРУ

Укрупненная группа научных специальностей: 1.1.Математика и механика

Перечень образовательных программ, на который осуществляется прием по данной программе:
101-01-00-111, 101-01-00-112, 101-01-00-113, 101-01-00-114, 101-01-00-115, 101-01-00-116

Москва 2026

1. **Краткое описание программы.**

Программа вступительного испытания разработана в соответствии с требованиями действующих федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) для уровней специалитета 01.05.01 «Фундаментальная математика и механика», магистратуры 01.04.01 «Математика», 01.04.02 «Прикладная математика и информатика», 01.04.03 «Механика и математическое моделирование», 01.04.04. «Прикладная математика» и 02.04.01 «Математика и компьютерные науки».

Программа вступительного испытания разработана для проведения конкурсного отбора абитуриентов, планирующих обучение по следующим программам высшего образования – программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре (далее аспирантура) *101-01-00-111, 101-01-00-112, 101-01-00-113, 101-01-00-114, 101-01-00-115, 101-01-00-116.*

Вступительное испытание в аспирантуру включает в себя три последовательных этапа. Проведение этапов может быть организовано как в течение одного дня, так и распределено на несколько дней — соответствии с утверждённым расписанием.

Срок проведения вступительного испытания определяется правилами приема в аспирантуру.

В программе описаны формы проведения каждого этапа, их содержательное наполнение, список рекомендуемой литературы, а также методика оценивания результатов.

Для допуска к последующему этапу необходимо успешно пройти предыдущий: абитуриент не может приступить ко второму или третьему этапу, не преодолев порог успешности на предшествующем.

2. **Критерии успешности прохождения этапов и вступительного испытания в целом.**

За вступительное испытание в сумме может быть набрано 25 баллов из них:

за первый этап 10 баллов;

за второй этап 10 баллов

за третий этап 5 баллов.

Прохождение вступительного испытания считается успешным если абитуриент набрал в сумме не менее 16 баллов.

Прохождение этапа считается успешным. Если абитуриент набрал не менее:

7 баллов на первом этапе

6 баллов на втором этапе

3 баллов на третьем этапе.

Для абитуриентов, участвовавших в конкурсе научного портфолио в году, соответствующем году поступления, действует следующее правило: победитель конкурса получает максимальный балл за всё вступительное испытание (все три этапа); призёр конкурса проходит все этапы вступительного испытания на общих основаниях, но получает дополнительные 3 балла, которые добавляются к общему результату вступительного испытания.

3. **Место проведения вступительного испытания:** Москва, улица Ленинские горы д.1.

4. **Форма проведения и содержание этапов вступительного испытания.**

Этап I. Оценка уровня знаний в области фундаментальной и прикладной математики и механики, компьютерных наук и информационной безопасности

Форма проведения этапа: очно в виде ответа на вопросы **из программы государственного экзамена**

Содержание этапа: первый этап состоит в проверке знаний по ключевым областям фундаментальной математики и математической физики. Перечень тем по программе «Фундаментальная математика», «Математика и компьютерные науки», «Математическая физика». *Приложение 1.*

Этап II. Оценка уровня знаний в научной области

Форма проведения этапа: очно в виде ответа на вопрос **по научной специальности**

Содержание этапа: второй этап состоит в проверке знаний в области научных интересов *Приложение 2.*

Основные источники (если применимо) не требуются

Фонд оценочных средств: Оценка от степени осознания и осмысления этой деятельности (осознанная, с четким представлением целей и смыла / отчасти осознанная, но с пониманием целей / слабо осознанная, стереотипная / неосознанная, по наитию / отсутствие каких-либо представлений) и от степени рефлексии (рефлексия деятельности в целом / рефлексия только своей деятельности /рефлексия отдельных действий / рефлексия только отдельных событий /отсутствие рефлексии)

Этап III. Оценка реферата на иностранном языке по научной специальности

Форма проведения этапа: очно в виде собеседования об интересующих абитуриента задачах по научной специальности, о постановке задачи, способах её решения и полученных результатах.

Содержание этапа: экспертная оценка наличия понимания смысла научно-исследовательской деятельности. Осуществляется посредством диалога с ответом на вопросы на иностранном языке, какие проблемы абитуриент видит при решении поставленной задачи и о его научных результатах.

Реферат по избранному направлению подготовки представляет собой обзор литературы по теме будущего научного исследования и позволяет понять основные задачи и перспективы развития темы будущей диссертационной работы. Реферат включает титульный лист, содержательную часть, выводы и список литературных источников. Объем реферата 10-15 страниц машинописного текста. В отзыве к реферату предполагаемый научный руководитель дает характеристику работы.

Основные источники (если применимо) не требуются

Фонд оценочных средств: оценка осуществляется в зависимости от степени понимания задаваемых вопросов и ясности и четкости ответа на них на иностранном языке.

Приложение 1
К программе вступительного испытания
механико-математического факультета
Утвержденного приказом
№1/101-ОСН от 21января 2026 г.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

1. Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций.
2. Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.
3. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.
4. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.
5. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.
6. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойство абсолютно сходящихся рядов. Умножение рядов.
7. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.
9. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
10. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
11. Теоремы Остроградского и Стокса. Дивергенция. Вихрь.
12. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли.
13. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
14. Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.
15. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.
16. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах.
17. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.
18. Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.

19. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.
20. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное.
21. Функции комплексного переменного. Условия Коши - Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
22. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования.
23. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.
24. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты.
25. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности.
26. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье.
27. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.

Рекомендуемая литература для подготовки:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру.
2. Зорич В.А. Математический анализ, тт. 1, 2.
3. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.
5. Тихонов А.Н., Самарский В.А. Уравнения математической физики.
6. Маркеев А.П. Теоретическая механика.
7. Голубев Ю.В. Основы теоретической механики.
8. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А., Тихомиров В.М. Оптимальное управление движением.
9. Седов Л.И. Механика сплошной среды, тт. 1, 2.
10. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.
11. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, тт.1, 2.
12. Черный Г.Г. Газовая динамика.
13. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды.
14. Галин Г.Я., Голубятников А.Н., Каменярж Я.А., Карликов В.П., Куликовский А.Г., Петров А.Г., Свешникова Е.И., Шикина И.С., Эглит М.Э. Механика сплошных сред в задачах, тт. 1, 2.
15. Новацкий В. Теория упругости.
16. Моисеев Н.Д. Очерки развития механики.17. Крутецкий, В.А. Психология математических способностей школьников. - М.: Институт практической психологии; Воронеж, НПО МОДЕК, 1998.

Приложение 2
К программе вступительного испытания
механико-математического факультета
Утвержденного приказом
№1/101-ОСН от 21января 2026 г.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО НАУЧНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

101-01-00-111.Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
2. Абсолютно непрерывные и сингулярные функции, их связь с интегралом Лебега.
3. Банаховы пространства. Три принципа линейного анализа (теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха об обратном операторе).
4. Слабая сходимость. Теорема о слабой компактности шара в гильбертовом пространстве.
5. Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах. Компактные операторы.
6. Спектр оператора. Простейшие свойства спектра. Теорема Гильберта-Шмидта то компактных самосопряженных операторах.
7. Преобразование Фурье в L2(R). Теорема Планшереля.
8. Обобщенные функции и действия над ними. Преобразование Фурье в S'
9. Неравенства Коши, теорема Лиувилля, нули полиномов в C.
10. Принцип аргумента и теорема Руше.
11. Принцип симметрии Римана-Шварца.
12. Аналитическая функция в целом (по Вейерштрассу). Точки ветвления.
13. Аналитическое продолжение по гомотопным путям. Теорема о монодромии.
14. Модулярная функция и малая теорема Пикара.

Рекомендуемая литература для подготовки:

ОСНОВНАЯ:
1 Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва, Ижевск: РХД, 2009
2 Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу. М.: 2004
3 Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998, 2002
4 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 5-е. М.: Наука, 1981
5 Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч.1-2. М.: Наука, 1985
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:
6 Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М: Высшая школа, 2000
7 Гелбаум Б., Омстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967
8 Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука,1988
9 Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т.1-2. М.: Наука, 1967, 1968
10 Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986
11 Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004, 2014.

Программа согласована с кафедрами математического анализа и ТФФА

101-01-00-112.Дифференциальные уравнения и математическая физика

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о продолжении решения. Случай линейных систем.
2. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Системы в вариациях.
3. Линейные системы. Определитель Вронского. Формула Лиувилля-Остроградского. Метод вариации постоянных.
4. Экспонента линейного оператора. Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Уравнения с квазимногочленом в правой части.
5. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Теорема об устойчивости по первому приближению.
6. Автономные системы. Три типа фазовых траекторий. Особые точки линейных систем на плоскости.
7. Обмотка тора. Эргодическая теорема для поворотов окружности.
8. Теорема о выпрямлении векторного поля. Первые интегралы. Теорема о существовании полной системы первых интегралов.
9. Квазилинейные уравнения с частными производными 1-го порядка: общее решение, задача Коши.
10. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Фундаментальные решения операторов с постоянными коэффициентами.
11. Задача Коши для волнового уравнения: энергетическое неравенство, единственность решения.
12. Формулы Кирхгофа и Пуассона для волнового уравнения. Качественное исследование задачи Коши для волнового уравнения.
13. Смешанная задача для волнового уравнения: единственность решения, метод Фурье (его обоснование в случае одной пространственной переменной).
14. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Функция Грина для задачи Дирихле и ее свойства. Функция Грина для шара. Решение задачи Дирихле для шара.
15. Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности.
16. Задачи Дирихле и Неймана: единственность решения, условие разрешимости задачи Неймана, сведение внешних задач к внутренним.
17. Уравнение теплопроводности. Первая краевая задача: принцип максимума, единственность решения, метод Фурье. Задача Коши: принцип максимума для слоя, интеграл Пуассон

ПРИМЕР ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ:

Вопрос 1. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
Вопрос 2. Задача Коши для волнового уравнения: энергетическое неравенство, единственность решения.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

Рекомендуемая литература для подготовки:

ОСНОВНАЯ:

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч. I. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2004.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч. II. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2004.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч. III. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2004.
4. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб: Лань, 2009.
5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Добросвет, МЦНМО, 1998.
6. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1, 2. М.: Изд-во МЦНМО, 2012.
7. Рудин У.Л. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
8. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Эдиториал УРСС, 2008.
9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Удм.ГУ, 2000.
10. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2007.
11. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В., Методы теории функций комплексного переменного, М.: Наука, 1973.
12. Рашевский П.К. Дифференциальная геометрия. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
13. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004.
14. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Бином, Лаборатория знаний, 2009.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965.
2. Никольский С.М. Математический анализ. М.: Наука, 1983.
3. Фихтенгольц Г.И. Основы математического анализа, тт. 1,2,3. СПб: Лань, 2015.
4. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: Гостехиздат, 1956.
5. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. тт. 1,2,3. М.: Юрайт-Издат, 2012.
6. Михайлов В.П. Лекции по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
8. Привалов Н.Н. Введение в теорию функции комплексных переменных. М.: Наука, 1984.
9. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. М.: Наука, 1976.
10. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
11. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 2009.
12. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
13. Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения. М.: Академия, 2013.
14. Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: Изд-во МЦНМО, 2001.

АВТОРЫ

Профессор, д.ф.-м.н. И.В. Асташова

Доцент, д.ф.-м.н. В.В. Быков

Профессор, д.ф.-м.н. И.В. Сергеев

Профессор, д.ф.-м.н. А.В. Филиновский

101-01-00-113.Геометрия и топология

1. Кривые в трехмерном пространстве. Формулы Френе. Восстановление кривой по кривизне и кручению.
2. Ковариантное дифференцирование на поверхностях в евклидовом пространстве. Символы Кристоффеля. Деривационные формулы. Формулы Гаусса и Петерсона-Кодацци. Теорема Гаусса. Восстановление поверхности по паре квадратичных форм.
3. Понятие многообразия, вложения, погружения, многообразия с краем. Разбиение единицы, реализация компактных многообразий поверхностями в евклидовом пространстве. Теорема Уитни.
4. Классификация двумерных многообразий.
5. Тензорные поля на многообразиях и операции над ними. Дифференциальные формы. Дивергенция и ротор векторного поля.
6. Аффинные связности на многообразиях. Ковариантное дифференцирование. Параллельный перенос и геодезические. Римановы связности. Тензор кривизны. Экспоненциальное отображение. Лемма Гаусса. Локальная минимальность геодезических линий. Кривизна двумерных многообразий. Скалярная и гауссова кривизны поверхности.
7. Первая и вторая вариации для уравнений геодезических. Сопряженные точки и условие минимальности.
8. Гомотопные отображения и гомотопически эквивалентные многообразия. Когомологии де Рама, их гомотопическая инвариантность. Группы когомологий двумерной сферы и n-мерного тора. Лемма Пуанкаре.
9. Степень отображения и ее гомотопическая инвариантность. Приложения степени (теорема Брауэра, теорема об отсутствии векторного поля без особых точек на двумерной сфере). Степень и интеграл. Индекс особой точки векторного поля.
10. Алгебры Ли, метрика Киллинга, основные матричные алгебры Ли, классификация трехмерных алгебр Ли.
11. Группы Ли и их алгебры Ли. Полупростые и разрешимые алгебры и группы Ли. Простейшие однородные пространства.
12. Теоремы Тихонова. Метризуемость пространств со счетной базой.

Рекомендуемая литература для подготовки:

1. Б.А. Дубровин, СП. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная Геометрия. УРСС, 2001
2. А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. «Курс дифференциальной геометрии и топологии». СПб.: Лань, 2010
3. П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967
4. Ш. Кобаяси, К. Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.

АВТОРЫ

Профессор, д.ф.-м.н. А.О. Иванов
Доцент, д.ф.-м.н. Д.В. Миллионщиков
Профессор, д.ф.-м.н. Ю.В. Садовничий
Профессор, д.ф.-м.н. А.А. Ошемков
Доцент, к.ф.-м.н. Ф.Ю. Попленский
Доцент, к.ф.-м.н. В.А. Шастин

101-01-00-114.Теория вероятностей и математическая статистка

I. Основные понятия и аппарат теории вероятностей

1. Вероятностная модель (Ω,F,P) и аксиоматика Колмогорова. Свойства вероятностной меры P (счетная аддитивность, непрерывность сверху и снизу).
2. Алгебры и σ-алгебры F событий. Монотонные классы. Определения, свойства.
3. Функция распределения на прямой и построение вероятностной меры по ней, основанное на теореме Каратеодори.
4. Случайные величины и их математическое ожидание. Свойства, теоремы о монотонной сходимости и мажорируемой сходимости. Лемма Фату. Неравенства Чебышева, Коши-Буняковского, Иенсена, Ляпунова, Гельдера, Минковского.
5. Условные вероятности и условные математические ожидания относительно под-σ-алгебр. Регулярные условные вероятности. Формула Байеса (классическая и обобщенная).
6. Сходимости последовательности случайных величин по вероятности, с вероятностью единица, в среднем квадратическом. Их взаимоотношения.
7. Характеристические функции и их свойства. Формула обращения. Теорема непрерывности. Теорема Бохнера-Хинчина.
8. Моменты и семиинварианты. Критерий Карлемана единственности проблемы моментов (формулировка).
9. Нормальное распределение (одномерное и многомерное). Теорема о виде оптимальной оценки поднабора компонент гауссовского вектора по другим компонентам того же вектора.
10. Лемма Бореля-Кантелли.

II. Предельные теоремы

1. Закон больших чисел в схеме Бернулли. (Доказательства, основанные на формуле Стирлинга и неравенстве Чебышева).
2. Предельные теоремы для схемы Бернулли. (Интегральная Муавра-Лапласа, локальная и теорема Пуассона).
3. Закон больших чисел Хинчина для последовательности независимых одинаково распределенных величин, имеющих первый момент (доказательство методом характеристических функций).
4. Центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин в условиях Ляпунова и Линдеберга.
5. Закон «нуля или единицы» Колмогорова, Хьюитта и Сэвиджа.
6. Теорема Колмогорова и Хинчина о сходимости с вероятностью единица ряда из независимых случайных величин.
7. Усиленный закон больших чисел. Теорема Кантелли (с доказательством, основанным на лемме Бореля-Кантелли). Теорема Колмогорова для независимых одинаково распределенных величин с конечным первым моментом (идея доказательства).
8. Формулировка закона повторного логарифма (идея доказательства для случая суммы независимых одинаково распределенных, по нормальному закону, случайных величин).

III. Случайные процессы

1. Теорема Колмогорова о существовании вероятностного процесса с заданной системой конечномерных функций распределения.
2. Теорема Колмогорова об условиях существования непрерывной модификации.

3. Определение и простейшие свойства винеровского и пуассоновского процессов. Конструкции таких процессов (винеровский - через ряд по функциям Шаудера; эквивалентное определение пуассоновского процесса в терминах процесса восстановления).

4. Стационарные в узком смысле случайные последовательности. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина.

5. Стационарные в широком смысле случайные последовательности. Спектральные представления для ковариационной функции и последовательности.

6. Марковские цепи. Марковское и строго марковское свойства.

7. Критерии возвратности и невозвратности. Простое случайное блуждание как марковская цепь (на конечномерных решетках). Возвратность и невозвратность.

8. Марковские процессы с непрерывным временем. Уравнение Колмогорова-Чепмена.

9. Прямые и обратные уравнения Колмогорова для диффузионных процессов.

10. Определение стохастического интеграла Ито по винеровскому процессу от адаптированных случайных процессов.

11. Формула Ито и формула Танака.

12. Стохастические дифференциальные уравнения. Существование и единственность (сильного) решения в условиях Липшица на коэффициенты.

13. Мартингалы, супермартингалы и субмартингалы. Основные неравенства и основные теоремы сходимости в случае дискретного времени (неравенство Дуба, теорема Дуба о сходимости субмартингала, теорема Леви).

IV. Математическая статистика

1. Вероятностно-статистическая модель. Типичные задачи математической статистики — определение неизвестной функции распределения по данным наблюдениям, оценка параметров распределения, проверка гипотез, линейная регрессия.

2. Эмпирические распределения. Теорема Гливенко-Кантелли.
3. Критерии согласия:
   a. критерий
   b. критерий Колмогорова
   c. критерий Смирнова.
4. Проверка статистических гипотез:
   a. проверка двух гипотез, ошибки первого и второго рода;
   a. лемма Неймана-Пирсона;
   b. проверка двух простых гипотез в нормальном случае;
   c. проверка двух простых гипотез методами последовательного анализа Вальда, оценки математических ожиданий длительности наблюдений через ошибки первого и второго рода.
5. Статистическое оценивание параметров распределения:
   a. достаточные и эффективные оценки; теорема Рао-Блэкуэлла;
   b. метод максимального правдоподобия; теорема Рао-Крамера;
   c. оценка параметров m и нормального распределения по n независимым нормальным наблюдениям.
6. Доверительные интервалы:
   a. для вероятности успеха в схеме Бернулли;
   b. для параметров нормального распределения.
7. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.

ПРИМЕР ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ:

Вопрос 1. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.

Вопрос 2. Пуассоновский процесс как процесс с независимыми приращениями, как счетная цепь Маркова и как процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

Рекомендуемая литература для подготовки:

1. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М., Наука, 1974.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей М., Наука, 1976.
3. Боровков А.А. Математическая статистика. М., Наука, 1984.
4. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М., Физматлит, 2005.
5. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М., Наука, 1975.
6. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.
7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., Наука,1988.
8. Крамер Г., Лидбеттер М., Стационарные случайные процессы. М., Мир, 1969.
9. Ширяев А.Н. Вероятность, статистика, случайные процессы. I, II, МГУ, 1973, 1974.
10. Ширяев А.Н. Вероятность. I, II, М., Изд-во МЦНМО, 2011.
11. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. Изд. 4, стереотип. URSS. 2021.
12. Магнус Я., Катышев П., Пересецкий А.   Эконометрика. М., Дело, 2004.
13. Феллер В.   Введение в теорию вероятностей. 1,2. М., Мир, 1967.

Литература по разделам программы.

I. Основные понятия и аппарат теории вероятностей

1. – [1], [7], [10], [11].

2-5. – [2], [5], [10], [11].

6-10. – [1], [4], [7], [2], [10], [11].

II. Предельные теоремы

1-8. – [6], [10], [11], [2], [7].

III. Случайные процессы

1-6. – [5], [4], [10], [6], [8].

IV. Математическая статистика

1-7. – [3], [7], [9], [10], [11], [12], [8].

Программы согласованы с зав. кафедрой теории вероятностей академик РАН А.Н. Ширяевым и зав. кафедрой математической статистики и случайных процессов профессор А.В. Булинским

101-01-00-115.Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

1. Язык логики высказываний. Булевы функции. Исчисление высказываний, его корректность и полнота. Интуиционистская логика высказываний.
2. Теорема Крипке о полноте интуиционистской логики высказываний. Полнота модальной логики K относительно моделей Крипке. Разрешимость проблемы распознавания выводимости в логике K.
3. Язык логики первого порядка. Интерпретации, модели. Теорема компактности, теорема Лёвенгейма—Скулема. Исчисление предикатов первого порядка, его корректность. Теорема о полноте. Нестандартные модели арифметики.
4. Теории первого порядка. Полные теории. Категоричные в данной мощности теории. Разрешимые теории. Категоричность в счётной мощности теории плотного линейного порядка без первого и последнего элементов.
5. Парадоксы наивной теории множеств. Аксиоматическая теория множеств. Аксиома выбора. Вполне упорядоченные множества и теорема Цермело. Лемма Цорна. Независимость аксиомы выбора от системы аксиом Цермело—Френкеля и независимость континуум-гипотезы от теории множеств Цермело—Френкеля с аксиомой выбора (без доказательства).
6. Общее понятие алгоритма. Вариант формализации понятия алгоритма. Универсальный алгоритм. Вычислимые функции, перечислимые и разрешимые множества. Пример перечислимого неразрешимого множества. Неразрешимые алгоритмические проблемы. Теорема Успенского—Райса.
7. Теорема Гёделя о неполноте. Неразрешимость формальной арифметики. Теорема Гёделя—Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике. Теорема Чёрча о неразрешимости логики предикатов.
8. Время и память как меры сложности вычислений. Классы P, NP, PSPACE. Полиномиальная сводимость. NP-полные проблемы.
9. Колмогоровская сложность объектов. Теорема Соломонова-Колмогорова о существовании оптимального способа описания.
10. Основная теорема арифметики. Расходимость ряда \Sum_p{1/p}.
11. Мультипликативные функции. Функция Мёбиуса. Формулы для количества и для суммы делителей. Функция Эйлера и её свойства.
12. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Китайская теорема об остатках. Решение полиномиальных сравнений по простому модулю.
13. Символ Лежандра. Квадратичный закон взаимности. Символ Якоби и его вычисление.
14. Первообразные корни. Существование первообразных корней по простому модулю p, модулям p^k, 2p^k, k>1. Индексы и их свойства.
15. Рациональные и иррациональные числа. Иррациональность корней и логарифмов. Нахождение рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами. Представление рациональных чисел бесконечными десятичными дробями. Длина периода.
16. Представление чисел цепными дробями. Теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными. Цепные дроби квадратичных иррациональностей.
17. Булевы функции и их нормальные формы. Эквивалентные преобразования формул в базисе {&, V,-,0,1}. Критерий полноты систем булевых функций.
18. Алгоритм распознавания полноты систем функций *k*-значной логики. Теорема Кузнецова. Особенности многозначных логик.
19. Конечные полные системы ограниченно-детерминированных функций (о.-д. функций) относительно операции суперпозиции и обратной связи. Отсутствие конечных полных систем о.-д. функций относительно операции суперпозиции. Автоматы. Теоремы Мура.

20. Основные комбинаторные объекты и их свойства. Методы решения комбинаторных задач с помощью производящих функций.
21. Оценки числа неизоморфных деревьев и связных графов с данным числом ребер. Раскраска графов.
22. Алфавитное кодирование. Критерий однозначности декодирования. Оптимальные коды. Линейные коды. Код Хемминга. Код Рида-Маллера. Код Боуза-Чоудхури-Хоквингема.
23. Методы Шеннона и Лупанова синтеза схем из функциональных элементов. Асимптотика роста функций Шеннона. Реализация симметрических функций.
24. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера - Капелли.
25. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
26. Линейные операторы линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями. Теорема Гамильтона-Кэли. Жорданова нормальная форма линейного оператора.
27. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные и самосопряженные линейные операторы, их матрицы. Приведение квадратичной формы к главным осям.
28. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах для групп. Порядок элемента. Циклические группы. Коммутант группы, разрешимые группы. Классы сопряженности, центр группы. Действие групп на множестве, стабилизаторы, орбиты.
29. Теоремы Силова.
30. Строение конечно порожденных абелевых групп.
31. Простота знакопеременных групп степени не ниже 5.
32. Ассоциативные кольца, идеалы, гомоморфизмы колец, их ядра и образы. Факторкольца, теорема о гомоморфизмах для колец. Простота алгебры матриц над полем.
33. Конечные расширения полей. Присоединение к полю корня неприводимого многочлена.
34. Тело кватернионов. Теорема Фробениуса.
35. Представления групп. Лемма Шура. Теорема Машке. Неприводимые комплексные представления конечных абелевых групп.
36. Дифференцируемость в нормированных пространствах.
37. Гладкие задачи без ограничений.
38. Оператор Немыцкого и её производная. Обобщенный оператор Немыцкого.
39. Лемма о правом обратном. Лемма о замкнутости образа.
40. Касательный вектор. Теорема Люстерника.
41. Теоремы отделимости.
42. Лемма о нетривиальности аннулятора. Лемма об аннуляторе ядра. Ядро сюръективного оператора.
43. Гладкие задачи с ограничениями, задаваемые равенствами. Необходимые условия экстремума первого порядка (правило множителей Лагранжа).

44. Необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка для гладких задач с ограничениями, задаваемыми равенствами.
45. Выпуклые функции. Выпуклость в терминах надграфика функции и неравенства Йенсена.
46. Субдифференциал выпуклой функции. Субдифференциал гладкой выпуклой функции.
47. Необходимые и достаточные условия минимума в выпуклой задаче без ограничений (теорема Ферма) и с ограничениями (теорема Каруша-Куна-Таккера).
48. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
49. Задача Больца. Интегралы уравнения Эйлера.
50. Задача Лагранжа. Необходимые условия слабого экстремума.
51. Задача со старшими производными. Уравнение Эйлера-Пуассона.
52. Изопериметрическая задача.
53. Задача оптимального управления с закрепленными концами. Формулировка принципа максимума Понтрягина (без доказательства).
54. Определение условий Лежандра, Якоби и Вейерштрасса для простейшей задачи вариационного исчисления.
55. Задача о гармоническом осцилляторе.

ПРИМЕР ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ:

1) Вопрос 1. Теоремы Силова.

Вопрос 2. Символ Лежандра. Квадратичный закон взаимности. Символ Якоби и его вычисление.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

2) Вопрос 1. Тело кватернионов. Теорема Фробениуса.

Вопрос 2. Теорема Крипке о полноте интуиционистской логики высказываний. Полнота модальной логики K относительно моделей Крипке. Разрешимость проблемы распознавания выводимости в логике K.

Вопрос 3. Содержание реферата по теме диссертационного исследования (с приложением реферата и отзыва на реферат с отметкой предполагаемого научного руководителя).

Рекомендуемая литература для подготовки:

1. Бухштаб А.А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.
2. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов, ч.2. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2017.
3. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов, ч.3. Вычислимые функции. М.: МЦНМО, 2017.
4. Виноградов И.М. Основы теории чисел. Любое издание.
5. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
6. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. М.: Физматлит, 2011.
7. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.

8. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

9. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. М.: Академия, 2008.

10. Новиков П.С. Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.

11. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность. Н.К.Верещагин, В.А.Успенский, А.Шень. - М.: МЦНМО, 2013. - 576 с.

12. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т.1 / под общ. ред. С.В. Яблонского и О.В. Лупанова. М.: Наука, 1974.

13. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.

14. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

15. Яблонский С.В. Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007.

16. Чашкин А.В. Дискретная математика. М.: Академия, 2012.

17. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.

18. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч.1. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2009.

19. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч.2. Линейная алгебра. М.: МЦНМО, 2009.

20. Кострикин А. И. Введение в алгебру, ч.3: Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2009.

21. Б.Л. Ван дер Варден. Алгебра. М.: Наука, 1972

22. С. Ленг. Алгебра. М.: Мир, 1968.

23. В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

24. Алексеев В., Тихомиров В., Галеев, Э.С.. Сборник задач по оптимизации. М: Издательский дом МГУ, 2023.

25. Э.М. Галеев, М.И. Зеликин и др.. Оптимальное управление. М.: МЦНМО, 2008.

АВТОРЫ

Член-корр. РАН, профессор Ю.В. Нестеренко

Академик РАН, профессор А.Л. Семенов

Академик РАН, профессор Д.О. Орлов

Профессор В.В. Кочергин

Профессор Э.Э. Гасанов

Профессор К.Ю. Осипенко

Доцент С.Т. Главацкий

Доцент М.П. Заплетин

к.ф.-м.н. Т.И. Зайцева

101-01-00-116.Вычислительная математика

Методы приближения функций.

1. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Погрешность приближения функции ее интерполяционным многочленом. Оптимизация погрешности приближения за счет выбора узлов интерполяции. Многочлены Чебышева и их свойства.
2. Наилучшее приближение в линейном нормированном пространстве. Существование и единственность многочлена наилучшего равномерного приближения.
3. Наилучшее приближение в гильбертовом пространстве и вопросы, возникающие при его практическом построении. Тригонометрическая интерполяция. Дискретное преобразование Фурье.
4. Сплайны. Экстремальные свойства сплайнов. Построение кубического интерполяционного сплайна. Интерполяционные и аппроксимационные сплайны. Теоремы о приближении функций сплайнами.

II. Численное интегрирование.

5. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона. Их точность. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса и метод неопределенных коэффициентов. Составные квадратурные формулы, оценки погрешности.
6. Ортогональные многочлены. Квадратуры Гаусса.
7. Практическая оценка погрешности. Интегрирование быстро осциллирующих функций. Оптимизация распределения узоров квадратурной формулы. Вычисление интегралов в нерегулярном случае.

III. Численные методы алгебры.

8. Прямые метода решения СЛАУ. Метод Гаусса и LU разложение. Методы вращений и отражений. Оценка числа арифметических операций.
9. Проблема собственных значений. Степенной метод. Методы вращений, Якоби, биссекции и QR-алгоритм.
10. Одношаговые итерационные методы решения СЛАУ. Методы простой итерации, Зейделя и наискорейшего градиентного спуска. Итерационные методы с использованием спектрально-эквивалентных операторов.
11. Многошаговые итерационные методы решения СЛАУ. Оптимизация скорости сходимости метода простой итерации с переменным итерационным параметром. Метод сопряженных градиентов.

IV. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

12. Методы Рунге-Кутта. Оценка погрешности одношаговых методов.
13. Конечно-разностные методы. Исследование свойств конечно-разностных методов на модельных задачах.
14. Особенности интегрирования систем уравнений. Методы решения жестких систем.
15. Постановка краевых задач для линейных систем первого порядка. Алгоритмы решения краевых задач для систем уравнений первого порядка.
16. Простейшие методы решения краевой задачи для уравнения второго порядка. Решение простейшей краевой сеточной задачи.

17. Построение численных методов для ОДУ с помощью вариационных принципов.

V. Методы решения уравнений в частных производных.

18. Аппроксимация гиперболических задач. Спектральный признак устойчивости. Принцип замороженных коэффициентов. Численное решение нелинейных задач с разрывными решениями.
19. Разностные методы решения для одномерного параболического уравнения.
20. Разностная аппроксимация эллиптических уравнений.
21. Решение параболических уравнений с несколькими пространственными переменными. Методы расщепления.
22. Метод решения сеточных эллиптических уравнений, основанный на быстром дискретном преобразовании Фурье.
23. Многосеточный метод решения сеточных эллиптических задач.

Рекомендуемая литература для подготовки:

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Изд.8-е. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000

2. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977

3. Голуб Дж., Ч.Ван Лоун. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999

4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980

5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.

АВТОРЫ

Профессор, д.ф.-м.н. Г.М. Кобельков
Доцент, д.ф.-м.н. А.А. Корнев
Профессор, д.ф.-м.н. К.Ю. Богачев
Доцент, к.ф.-м.н. А.В. Попов