

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Декан механико-математического
факультета, д.ф.-м.н., профессор,
член-корреспондент РАН

_____ /А.И. Шафаревич/

« 29 » сентября 2023 г.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по научной специальности

1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика

Область науки: **1. Естественные науки**

Группа научных специальностей: **1.1. Математика и механика**

Наименование отраслей науки, по которым присуждаются ученые степени:
физико-математические науки

Рабочая программа утверждена
Ученым советом факультета
(протокол № X от XX сентября 2023 г.)

Москва 2023

Описание программы

Настоящая программа содержит следующие разделы:

- Вероятностные меры
- Случайные величины и распределения в \mathbb{R}^n . Предельные теоремы
- Случайные процессы. Распределения в функциональных пространствах
- Некоторые классы случайных процессов. Стохастические дифференциальные уравнения
- Элементы математической статистики.

I. Основные разделы и вопросы к экзамену

1. Вероятностные меры

1.1. Системы подмножеств (алгебры, сигма-алгебры). Борелевские сигма-алгебры. Примеры измеримых пространств: \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^n , \mathbb{R}^∞ .

1.2. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова. Основные свойства вероятностной меры.

1.3. Теорема Каратеодори о продолжении меры. Функция распределения вероятностной меры в \mathbb{R}^n , взаимно-однозначное соответствие между функциями распределения и вероятностными мерами.

1.4. Случайные величины и векторы, их основные характеристики. Виды сходимостей: сходимость почти наверное, сходимость по вероятности, сходимость по распределению.

1.5. Независимость событий и сигма-алгебр. Независимость случайных величин, критерий независимости в терминах функций распределений.

1.6. Определение интеграла Лебега и его связь с интегралом Лебега-Стилтьеса в \mathbb{R}^1 . Математическое ожидание случайной величины. Замена переменных в интеграле Лебега.

1.7. Теорема Радона-Никодима. Условные вероятности, условные математические ожидания и условные распределения.

1.8. Произведения мер. Теорема Фубини.

1.9. Пространство L_p случайных величин и его характеристики. Сходимость в пространстве L_p . Ортогональность или некоррелированность случайных величин. Проекция случайной величины на подпространство, порожденное другими случайными величинами. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

2. Случайные величины и распределения в \mathbb{R}^n . Предельные теоремы

2.1. Распределения случайных величин и случайных векторов.

2.2. Характеристические функции, их свойства. Формулы обращения, равенство Парсеваля. Слабая сходимость и теорема непрерывности.

2.3. Многомерное нормальное распределение. Основные свойства гауссовских случайных векторов.

2.4. Безгранично делимые распределения: определение, свойства, примеры. Представление Леви-Хинчина логарифма характеристической функции безгранично делимого закона.

2.5. Закон "нуля или единицы". Теоремы Бореля и Колмогорова.

2.6. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин (случаи одинаково и не одинаково распределенных случайных величин).

2.7. Закон повторного логарифма для сумм независимых случайных величин.

2.8. Теорема Пуассона, оценка скорости сходимости в теореме Пуассона (случаи одинаковых или не одинаково распределенных индикаторов).

2.9. Центральная предельная теорема (в форме Ляпунова и в форме Линдберга-Феллера).

2.10. Теорема Берри-Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме.

2.11. Вероятности больших отклонений сумм независимых случайных величин.

3. Случайные процессы. Распределения в функциональных пространствах

- 3.1. Распределения в функциональных пространствах. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях.
- 3.2. Гауссовские процессы. Теорема о существовании гауссовского процесса с заданной ковариационной функцией.
- 3.3. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс и его свойства. Винеровский процесс и свойства его траекторий.
- 3.4. Теорема Колмогорова-Ченцова о модификациях случайных процессов.
- 3.5. Стохастический интеграл от неслучайной функции и его основные свойства. Теорема Карунена. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса и его ковариационной функции. Теорема Бохнера-Хинчина.
- 3.6. Слабая сходимость, относительная компактность и плотность семейства вероятностных мер. Теорема Прохорова.
- 3.7. Непрерывность и дифференцируемость случайной функции. Линейные преобразования стационарных в широком смысле процессов. Линейное прогнозирование, разложение Вольда.
- 3.8. Стационарность в узком смысле и эргодичность случайных последовательностей. Теорема Биркгофа-Хинчина.

4. Некоторые классы случайных процессов. Стохастические дифференциальные уравнения

- 4.1. Цепи Маркова (с дискретным временем), классификация состояний, условия эргодичности.
- 4.2. Цепи Маркова с непрерывным временем, дифференциальные уравнения Колмогорова для переходных вероятностей и распределения цепи. Эргодическая теорема.
- 4.3. Марковские процессы, различные определения. Марковские полугруппы. Уравнения Колмогорова.
- 4.4. Мартингалы и полумартингалы, теоремы об остановленном мартингале.

Тождество Вальда.

4.5. Теоремы о сходимости мартингалов. 6. Процессы рождения и гибели: определение, условия эргодичности, предельные распределения, примеры.

4.7. Ветвящиеся процессы (с дискретным временем и одним типом частиц): определение, условия вырождения, предельные теоремы для числа частиц.

4.8. Стохастический интеграл Ито. Формула замены переменных Ито.

4.9. Стохастические дифференциальные уравнения, понятие сильного и слабого решения. Теорема о достаточном условии существования и единственности сильного решения СДУ.

5. Элементы математической статистики

5.1. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливленко-Кантелли. Критерий Колмогорова.

5.2. Достаточные статистики и сигма-алгебры. Критерий достаточности Neymana-Фишера. Минимальные достаточные статистики.

5.3. Теорема Рао-Блекуэлла-Колмогорова и ее использование для построения наилучших статистических оценок.

5.4. Полнота семейств распределений. Экспоненциальные семейства распределений. Теорема о полных достаточных статистиках в экспоненциальных семействах.

5.5. Неравенство Крамера-Рао (одномерный и многомерный варианты). Информация Фишера.

5.6. Методы получения статистических оценок. Метод максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия в условиях регулярности.

5.7. Наиболее мощный критерий для проверки двух простых гипотез. Лемма Neymana-Пирсона. Равномерно наиболее мощные критерии.

5.8. Проверка простой гипотезы в полиномиальной схеме Бернулли. Теорема Пирсона о предельном распределении статистики хи-квадрат. Критерий хи-квадрат.

5.9. Задача регрессии. Линейная регрессионная модель. Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия в случае нормального распределения. Доверительные интервалы для параметров линейной регрессии в случае нормального распределения.

II. Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Ширяев А.Н. Вероятность. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2007.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. 4-е изд. М.: УРСС, 2003.
3. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
4. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Физматлит, 1996.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 10-е изд. М.: УРСС, 2011.
6. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010.

Дополнительная литература:

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.
2. Боровков А.А. Математическая статистика. 3-е изд. М.: Физматлит, 2008.
3. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Физматлит, 1987.
4. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971
5. Энциклопедия "Вероятность и математическая статистика" Под ред. Ю.В. Прохорова. М.: Российская энциклопедия, 1999.

III. Критерии оценивания

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
1	2	3	4
Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Отсутствие знаний или фрагментарные знания основных и специальных разделов теории вероятностей и математической статистики, современных тенденций в теории вероятностей и математической статистике	Неполные знания основных и специальных разделов теории вероятностей и математической статистики, методов статистической обработки данных, современных тенденций в теории вероятностей и математической статистике	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания основных и специальных разделов теории вероятностей и математической статистики, методов статистической обработки данных, современных тенденций в теории вероятностей и математической статистике	Сформированные систематические знания основных и специальных разделов теории вероятностей и математической статистики, методов статистической обработки данных, современных тенденций в теории вероятностей и математической статистике