

### 1.1.3. Геометрия и топология

(физико-математические науки)

#### 1. Общая топология

##### Часть 1

1. Теорема Тихонова о компактности произведения компактных пространств. Компактификация Чеха--Стоуна. Одноточечная компактификация Александрова локально компактного пространства. [Ал]
2. Лемма Шпернера о раскраске. Теорема Брауэра о барабане (граничная сфера не является ретрактом шара). [АП] Гл. 3 §§ 3,4.
3. Лебегово определение размерности. Канторово множество. Негомеоморфность  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^k$
4. Метризуемые топологические пространства. Метризационный критерий Нагаты-Смирнова

##### Часть 2

1. Нерв покрытия и аппроксимация компакта полиэдрами.
2. Индуктивное определение топологической размерности. Теорема Урысона об эквивалентности.
3. Хаусдорфова размерность. Ее связь с топологической. Фракталы: канторово множество, ковер Серпинского, их хаусдорфова размерность.

#### 2. Алгебраическая топология

##### Часть 1

1. Гомотопия и гомотопическая эквивалентность. Фундаментальная группа топологического пространства. Теорема ван Кампена. [ФФ] Гл. 1 §§3,6, [Ха] §1.1.
2. Клеточные пространства (CW-комплексы). Задание фундаментальной группы клеточного пространства образующими и соотношениями. [ФФ] Гл. 1 §§5,6, [Ха] §1.2.
3. Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа. Регулярные накрытия, классификация накрывающих пространств. [ФФ] Гл. 1 §7, [Ха] §1.3.
4. Локально-тривиальные расслоения. Свойство накрывающей гомотопии. Расслоения в смысле Серра и Гуревича. Пространства путей, петель и свободных петель. [ФФ] Гл. 1 §9, [Ха] Гл. 4.
5. Гомотопические группы. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Расслоение Хопфа. Гомотопическая классификация отображений  $S^3$  в  $S^2$ . [ФФ] Гл. 1 §§8,9, [Ха] Гл. 4.
6. Симплициальные комплексы и группы симплициальных гомологий. Связь фундаментальной группы и группы одномерных гомологий. [Ха] §2.1, §2.A.

## ПРОГРАММА-МИНИМУМ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ

7. Сингулярные гомологии и когомологии. Естественность, гомотопическая инвариантность, точная последовательность Майера-Виеториса. [ФФ] Гл. 2 §§12,15, [Ха] §§2.1, 3.1.
8. Клеточные гомологии и когомологии, их связь с сингулярными. Эйлерова характеристика. Гомологии вещественных и комплексных проективных пространств. [ФФ] Гл. 2 §13, [Ха] §2.2.

### Часть 2

1. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Точная последовательность пары. Оператор Бокштейна
2. Умножение в когомологиях. Гомологии и кольца когомологий проективных пространств. Двойственность Пуанкаре для многообразий.
3. Теории гомологий и когомологий. Аксиомы теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий. Пространства Эйленберга-Маклейна. Группы когомологий как группы гомотопических классов отображений в пространства Эйленберга-Маклейна.
4. Клетки Шуберта и гомологии комплексных многообразий Грассмана. [ФФ] Гл. 2 §13, [МС2] §6.
5.  $H$ -пространства и группа гомотопических классов отображений в  $H$ -пространство. Коммутативность фундаментальной группы  $H$ -пространства.
6. Кольцо когомологий  $H$ -пространства как алгебра Хопфа. Классификация градуированных алгебр Хопфа над полем рациональных чисел.
7. Векторные расслоения. Операции с расслоениями: прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений; тензорные, симметрические, внешние степени, детерминантное расслоение. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения.
8. Пространства Тома и изоморфизм Тома в гомологиях и когомологиях. Действие монодромии в гомологиях расслоения. Формула Пикара-Лефшеца.
9. Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения). Понятие о характеристических классах расслоений. Классы Штифеля-Уитни, Чженя и Понтрягина. Класс Эйлера.
10. Понятие о группе  $K(X)$  и периодичности Ботта. Группа  $K(X)$  как когомологический функтор .
11. Узлы и зацепления. Движения Райдемайстера. Полином Александера узла. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на плоскости.
12. Примеры трехмерных многообразий. Склейка полноторий по диффеоморфизму границы. Диаграмма Хегора трехмерных многообразий

## 3. Топология гладких многообразий

### Часть 1

1. Классификация замкнутых двумерных поверхностей. Группы гомологий и фундаментальные группы компактных двумерных поверхностей. [МФ] Гл. 4 §5, [МС1] Гл.1 §10.
2. Римановы поверхности. Разветвленные накрытия, формула Римана-Гурвица.

## ПРОГРАММА-МИНИМУМ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ

3. Гладкие многообразия. Теория Морса. Критические точки. Лемма Морса. Основная теорема теории Морса. Операция приклейки ручки. Разложение многообразия на ручки. Неравенства Морса. [НТ] Гл. 5 §5.1,5.2, [ДНФ] Ч. 2 Гл. 1 §§1,2, [МФ] Гл. 3.
4. Векторные расслоения над многообразиями. Касательное и нормальное расслоение. Прямая сумма и тензорное произведение расслоений. [Ми] Гл. 1 §3.
5. Векторные поля на многообразиях. Однопараметрические группы диффеоморфизмов. Коммутатор векторных полей. Производная Ли. [НТ] Гл. 8 §8.3, [Ар] Гл. 8 §39.
6. Вложения и погружения. Критические и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда. Теорема Уитни о вложении и погружении в евклидовы пространства. [ДНФ] Ч. 2 Гл. 2 §§10,11, [МФ] Гл. 3 §4.
7. Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Гомотопическая классификация отображений  $n$ -мерной сферы в себя. Степень отображения и интеграл. Индекс особой точки векторного поля, Теорема Эйлера-Пуанкаре. [ДНФ] Ч. 2 гл. 3 §§13,14, [МФ] Гл. 6 §3.
8. Понятие о трансверсальном отображении, прообраз подмногообразия. Теорема трансверсальности. [ДНФ] Ч. 2 Гл. 2 §10.

### Часть 2

1. Кольца когомологий двумерных поверхностей
2. Гомотопическая классификация отображений замкнутого ориентированного  $n$ -мерного многообразия в  $n$ -мерную сферу (добавил)
3. Простые и сложные функции Морса. Представление многообразия в виде клеточного комплекса, связанного с функцией Морса.
4. Перестройки многообразий. Конструкция Понтрягина-Тома. Понятие бордизма многообразий.
5. Исчисление струй. Топология Уитни в пространствах гладких отображений. Локальная классификация устойчивых отображений плоскости в плоскость и в трехмерное пространство. Число Милнора изолированной особенности функции.
6. Двойственность Александера.
7. Индексы пересечения и зацепления.

## 4. Дифференциальная геометрия

### Часть 1

1. Фундаментальные уравнения теории подмногообразий в евклидовом пространстве: уравнения Гаусса, Кодацци, Риччи. Теорема Гаусса (Egregium), теорема Бонне. [НТ] Гл. 3 §3.4.
2. Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. [НТ] Гл. 9 §§9.1,9.2, [ДНФ] Ч. 1 Гл. 3 §18, Гл. 4 §26, Ч. 2 Гл. 2 §8. [МФ] Гл. 5 §5, Гл. 6 §2.
3. Точные и замкнутые формы. Когомологии де Рама. Лемма Пуанкаре. Отображение в когомологиях, индуцированное гладким отображением. Теорема о совпадении когомологий де Рама и сингулярных когомологий. [НТ] Гл. 9 §9.3, [МФ] Гл. 6 §1. [Уо] Гл. 5.
4. Ковариантное дифференцирование. Симметрическая риманова связность. Индуцированная связность на подмногообразии риманова многообразия (связность Леви-

## ПРОГРАММА-МИНИМУМ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ

- Чивита) Запись ковариантной производной и ее свойств в координатах и в инвариантной форме [НТ] Гл. 10 §10.1, [ДНФ] Ч. 1 Гл. 4 §§28,29, [МФ] Гл. 5 §§7,8.
5. Тензор кривизны. Координатная и инвариантная формы записи. Критерий локальной евклидовости римановой метрики. Тензор Риччи и скалярная кривизна. [НТ] Гл. 10 §10.2, [ДНФ] Ч. 1 Гл. 4 §30, [МФ] Гл. 5 §10.
  6. Параллельный перенос и геодезические на многообразии. Теоремы о существовании и единственности геодезических. [ДНФ] Ч. 1 Гл. 4 §29, [МФ] Гл. 5 §9.
  7. Вариационная природа геодезических. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Геодезические как экстремали функционалов энергии и длины. [ДНФ] Ч. 1 Гл. 5 §31, [МФ] Гл. 7 §§2-4.
  8. Модели геометрии Лобачевского, описание геодезических в них. Различные формы записи метрик плоскости Лобачевского и сферы, соответствующие описания групп движений. [НТ] Гл. 4 §4.3, [ДНФ] Ч. 1 Гл. 2 §13, [МФ] Гл. 1 §4, Гл. 5 §9.
  9. Группы и алгебры Ли. Экспоненциальное отображение. Присоединенное представление. Алгебра Ли векторных полей. Примеры: классические матричные группы. [НТ] Гл. 5 §5.2, Гл. 6 §6.1, [МФ] Гл. 4 §3, [Ар] Гл. 8, §39.
  10. Левоинвариантные метрики на группах Ли. Геодезические левоинвариантных метрик. Тензор кривизны.
  11. Комплексные и кэлеровы многообразия. Метрика Фубини-Штуди на комплексном проективном пространстве. [НТ] Гл. 11 §11.2, [ГХ] Гл. 0.
  12. Симплектические многообразия. Теорема Дарбу. Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии. [НТ] Гл. 11 §11.2, Гл. 13 §13.1, [Ар] Гл. 8 §37, 41, [ГХ] Гл. 0.
  13. Скобка Пуассона. Примеры пуассоновых многообразий. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Первые интегралы гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля об инвариантных торах. [НТ] Гл. 13 §13.1, [Ар] Гл. 8 §40.
  14. Слоения и распределения. Теорема Фробениуса

### Часть 2

1. Теорема Клеро. Геодезические метрики Лиувилля.
2. Оператор Лапласа и гармонические формы. Двойственность Пуанкаре.
3. Тензор Риччи трехмерного многообразия.
4. Гладкие локально тривиальные расслоения. Сечения. Векторные расслоения. Связности в расслоениях, группы голономии, форма кривизны, тождество Бьянки.
5. Характеристические классы. Конструкция Чженя-Вейля. Характеристические числа, их инвариантность относительно бордизма.
6. Проективная двойственность, преобразования Лежандра.
7. Поля Якоби, первая и вторая вариации, сопряженные точки, индекс геодезической.
8. Пример нематричной группы Ли.
9. Компактные группы Ли и биинвариантная метрика. Кольцо когомологий де Рама компактной группы Ли, связь с алгеброй Ли. Группы токов и группы диффеоморфизмов как примеры бесконечномерных групп Ли.
10. Полупростые алгебры Ли. Картановские подалгебры. Корни и корневое разложение полупростой алгебры Ли. Системы корней простых алгебр Ли.
11. Присоединенное и коприсоединенное представление. Орбиты коприсоединенного представления. Орбиты общего положения и сингулярные орбиты.
12. Уравнения Эйлера на алгебрах Ли. Основные свойства. Примеры.

## ПРОГРАММА-МИНИМУМ КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ

13. Однородные пространства. Примеры: классические матричные группы, многообразия Грассмана и Штифеля, лагранжевы грассманианы.
14. Симметрические пространства. Основные примеры.
15. Симплектическая структура на орбитах коприсоединенного представления. Гамильтоновость уравнений Эйлера.
16. Теорема Лиувилля о полной интегрируемости (существование переменных действие-угол).
17. Некоммутативная интегрируемость. Алгебры Ли интегралов.
18. Контактные структуры и контактные многообразия. Примеры .
19. Выпуклые множества и разбиения пространства. Разбиения Вороного и Делоне.
20. Кристаллы как правильные точечные системы. Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве. Классификация кристаллографических групп на плоскости. Группы симметрий бордюров, классификация.
21. Правильные многогранники. Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данным набором граней.

### Список литературы

- [Ал] П.С. Александров. *Введение в теорию множеств и общую топологию*. Москва, Наука, 1977.
- [АП] П.С. Александров, Б.А. Пасынков. *Введение в теорию размерности*. Москва, Наука, 1973.
- [Ар] В.И. Арнольд. *Математические методы классической механики*. Москва, Наука, 1989.
- [ВИНМ] О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов. *Элементарная топология*. Москва, МЦНМО, 2010.
- [ГХ] Ф.Гриффитс, Дж.Харрис. *Принципы алгебраической геометрии*, в 2 т. Москва, Мир, 1982.
- [ДНФ1] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. *Современная геометрия*. Части 1, 2. Москва, Наука, 1986.
- [ДНФ2] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. *Современная геометрия*. Часть 3 (Методы теории гомологий). Москва, Наука, 1984.
- [КН] Ш. Кобаяси, К. Номидзу. *Основы дифференциальной геометрии*, в 2 т. Москва, Наука, 1981.
- [МС1] У.Масси, Дж.Столлингс. *Алгебраическая топология. Введение*. Москва, Мир, 1977.
- [МС2] Дж.Милнор, Дж.Сташеф. *Характеристические классы*. Москва, Мир, 1979.
- [Ми] А.С. Мищенко. *Векторные расслоения и их применения*. Москва, Наука, 1984.
- [МФ] А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. *Курс дифференциальной геометрии и топологии*. СПб., Лань, 2010.
- [НТ] С.П. Новиков, И.А.Тайманов. *Современные геометрические структуры и поля*. Москва, МЦНМО, 2005.
- [Уо] Ф.Уорнер. *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*. Москва, Мир, 1987.
- [ФФ] А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии*. Москва, Наука, 1989.
- [Ха] А. Хатчер. *Алгебраическая топология*. Москва, МЦНМО, 2011.
- [Ци] Г.Циглер. *Теория многогранников*. Москва, МЦНМО, 2014.