Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Декан механико-математического
факультета, д.ф.-м.н.,
член-корр. РАН, профессор

__________________ /*А.И. Шафаревич*/

«30» сентября 2022 г.

.

ВРЕМЕННАЯ ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

1.1.1 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Область науки: **1. Естественные науки**
Группа научных специальностей: **1.1. Математика и механика**
Наименование отраслей науки, по которым присуждаются ученые степени:
физико-математические науки

Рабочая программа утверждена
Ученым советом факультета
(протокол № 6 от 30 сентября 2022 г.)

Москва 2022

I. Описание программы

Настоящая программа охватывает основополагающие разделы и области знания, в основе данной программы лежат следующие дисциплины: математический анализ, действительный анализ, комплексный анализ (теория функций комплексного переменного), функциональный анализ.

II. Основные разделы и вопросы к экзамену

1. Действительный анализ и функциональный анализ

1.1. Необходимые (базовые) сведения

Мера и интеграл Лебега. Теоремы Егорова и Лузина. Теоремы Лебега, Беппо Леви и Фату. Неравенства Гёльдера, Минковского и Йенсена. Теорема Фубини. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стилтьеса.

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции ограниченной вариации. Абсолютно непрерывные функции. Восстановление функции по ее производной.

Метрические и топологические пространства. Основные свойства компактных пространств. Теорема Тихонова. Критерии компактности метрических пространств. Теорема Стоуна - Вейерштрасса.

Нормированные и евклидовы пространства. Пространства L_p, их полнота. Ортогональные проекции. Ортонормированные системы и базисы. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Полные и замкнутые ортонормированные системы. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Примеры базисов в L_2. Критерии компактности в $C[a,b]$ и $L_p\,[a,b]$.

Тригонометрические ряды. Признаки сходимости Дини и Жордана рядов Фурье. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Формула обращения. Теорема Планшереля.

Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана - Банаха. Теоремы об отделимости выпуклых множеств. Локально выпуклые пространства.

Общий вид непрерывных линейных функционалов на основных функциональных пространствах. Слабая топология и слабая сходимость в банаховом пространстве. Сопряженное пространство и *-слабая топология в нем. Теорема Банаха-Алаоглу.

Спектр и резольвента. Компактные операторы. Спектр компактного оператора. Теоремы Фредгольма. Теорема Гильберта – Шмидта.

Пространства D и S. Обобщенные функции классов D’ и S’. Дифференцирование и свертка обобщенных функций. Преобразование

Фурье в S’. Пространства Соболева: равносильные определения и теоремы вложения в L_p и в C.

1.2. Дополнительные (специальные) вопросы

Мера Хаара на локально компактных группах; меры Хаара на группе обратимых матриц и группе ортогональных матриц. Бесконечное произведение мер.

Результаты количественного характера о конечномерных нормированных пространствах, их следствия и приложения: теорема Джона, почти сферические сечения выпуклых тел, теорема факторизации Гротендика.

Всплески: основные понятия и примеры.

Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема (приведение к виду умножения на функцию и представление через интеграл по проекторной мере). Функциональная модель унитарного оператора.

Банаховы алгебры (определение и примеры).

Неограниченные операторы (основные понятия и примеры). Симметричные и самосопряженные операторы. Самосопряженные расширения. Индексы дефекта. Спектральная теорема для неограниченных самосопряженных операторов. Непрерывные операторные полугруппы и их генераторы (основные понятия и примеры). Теорема Стоуна для однопараметрических групп унитарных операторов.

Структура обобщенных функций с компактным носителем. Уравнения с частными производными с постоянными коэффициентами в классах обобщенных функций; применение преобразования Фурье; разрешимость в D’ и S’.

Дифференцирование в нормированных пространствах. Производные Гато и Фреше. Производные высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функций. Необходимое условие локального минимума. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Метод Ньютона.

2. Комплексный анализ

2.1. Необходимые (базовые) сведения

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца.

Равномерно сходящиеся ряды голоморфных функций; теорема Вейерштрасса. Представление голоморфных функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули голоморфных функций. Теорема единственности. Классификация изолированных особых точек. Теорема Коши о вычетах.

Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше.

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерий локальной однолистности. Обратный принцип соответствия границ. Принцип симметрии Римана-Шварца. Теорема Гурвица. Критерий предкомпактности семейства функций (теорема Монтеля). Теорема Римана.

Гармонические функции двух переменных, их связь с голоморфными функциями. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцирумость. Теорема о среднем и принцип максимума. Теоремы единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Продолжение вдоль пути. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки (ветвей) аналитических функций, точки ветвления.

2.2. Дополнительные (специальные) вопросы

Интеграл типа Коши и интеграл в смысле главного значения. Формулы Сохоцкого. Теоремы Рунге о приближении голоморфных функций рациональными функциями и многочленами. Теорема Каратеодори о соответствии границ при конформных отображениях (для жордановых областей).

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

Формула Кристоффеля-Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара.

Дискриминант многочлена. Два определения алгебраической функции: функциональное и алгебраическое; их эквивалентность.

Степенные ряды от нескольких переменных: полидиск сходимости, область сходимости и ее логарифмическая выпуклость. Голоморфные функции нескольких переменных: C-дифференцируемость, представимость кратной интегральной формулой Коши, разложение в степенной ряд, эквивалентность трех условий. Многомерные версии интегральной теоремы Коши и теоремы Мореры. Логарифмическая выпуклость и продолжение голоморфных функций; области голоморфности. Голоморфные отображения: комплексные версии теорем о неявном и обратном отображении, теорема Картана об автоморфизмах ограниченной области.

3. Анализ на многообразиях

Гладкие многообразия и дифференциальные формы. Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа.

III. Критерии оценивания

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
1	2	3	4
Неудовлетворительно	**Удовлетворительно**	**Хорошо**	**Отлично**
Фрагментарные знания в области действительного, комплексного и функционального анализа	Неполные знания в области действительного, комплексного и функционального анализа	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания в области действительного, комплексного и функционального анализа	Сформированные и систематические знания в области действительного, комплексного и функционального анализа

IV. Рекомендуемая литература

Основная литература

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976 (1989).
Зорич В.А. Математический анализ. Т. 2. М.: Наука, 1984.
Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967-1968.
ТФФА – лекции для аспирантов. М.: МГУ, 2022.
Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1976 (1985).

Дополнительная литература

Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. М.: РХД, 2011.
Бородин П.А., Савчук А.М., Шейпак И.А. Задачи по функциональному анализу.
Ч. I, II. 2-е изд. Мех-мат ф-т МГУ, М., 2010.
Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976 (1981).
Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991.
Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1975 (1991).
Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1977 (1999).
Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1976.
Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2005.
Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.

V. Авторы временной программы

Академик РАН, проф. Кашин Борис Сергеевич и профессора кафедры теории функций и функционального анализа.