

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Декан механико-математического
факультета, д.ф.-м.н.,
член-корр. РАН, профессор

_____ /А.И. Шафаревич/

«30» сентября 2022 г.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

1.1.6. Вычислительная математика

Область науки: **1. Естественные науки**

Группа научных специальностей: **1.1. Математика и механика**

Наименование отраслей науки, по которым присуждаются ученые степени:
физико-математические науки

Рабочая программа утверждена

Ученым советом факультета

(протокол № 6 от 30 сентября 2022 г.)

Москва 2022

I. Основные разделы и вопросы к экзамену

1. Функциональный анализ

1.1. Метрические, нормированные, гильбертовы пространства. Метрические пространства. Полнота. Непрерывные отображения. Компактные множества. Принцип сжатых отображений, метод последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства. Сильная и слабая сходимости. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

1.2. Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора. Сходимость операторов. Обратимость. Ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным. Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, самосопряженные, симметричные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождение собственных значений (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов). Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимости и применение. Теоремы Фредгольма для уравнений с вполне непрерывным оператором. Теорема Гильберта-Шмидта.

1.3. Пространства функций C , C_p , L_2 , L_p , W_2^1 , W_p^k . Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса. Понятие о теоремах вложения. Пространства обобщенных функций D' , S' .

2. Уравнения прикладных задач

2.1. Математические модели физических задач, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

2.2. Обобщенное решение краевых задач и задач на собственные значения для эллиптических уравнений в самосопряженной форме. Вариационные свойства собственных значений. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа. Вариационные методы решения краевых задач (Ритца, Галеркина, наименьших квадратов).

2.3. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях). Фундаментальные решения. Характеристики. Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач с однородными краевыми условиями для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость. Метод Фурье. Метод Галеркина.

2.4. Линейные оптимизационные модели. Условия оптимальности и двойственность в задачах линейного и квадратичного программирования.

3. Численные методы

3.1 Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида.

Одношаговые итерационные методы. Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двухшаговые) чебышевские итерационные методы. Методы сопряженных градиентов решения линейных систем и спектральных задач.

Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений I рода.

3.2. Численные методы условной оптимизации. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Методы проекции градиента и условного градиента решения задач нелинейной оптимизации. Метод штрафных функций

3.3. Приближение функций. Общие свойства ортогональных систем многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Быстрое дискретное преобразование Фурье и его применение в теории приближений и методах решения задач математической физики. Интерполяция сплайнами. Методы спуска для поиска экстремума функционалов.

3.4. Численное интегрирование. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Квадратурные формулы со случайными узлами. Многомерные интерполяционные, симметричные квадратурные формулы. Интегрирование быстро осциллирующих функций.

3.5. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Метод прогонки. Однородные разностные схемы. Жесткие системы уравнений и методы их решения.

3.6. Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики.

Основные понятия (аппроксимация, сходимость, устойчивость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционные методы, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение для решения краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка точности.

Дивергентные, консервативные разностные схемы. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость. Методы расщепления многомерных нестационарных задач. Экономичные методы решения многомерных задач. Методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газодинамики).

3.7. Методы решения разностных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод, метод сопряженных градиентов. Многосеточный метод. Методы расщепления и переменных направлений. Оценка сходимости.

4. Программная реализация вычислительных алгоритмов

Языки программирования высокого уровня: архитектура и сравнительный анализ. Критерий выбора языка для разработки прикладных программ.

Машинные форматы представления числовых данных. Машинная арифметика. Влияние особенностей реализации машинной арифметики на погрешность вычислительных алгоритмов.

Эффективность программной реализации вычислительного алгоритма. Оптимизирующие возможности компиляторов.

Пакеты прикладных программ (ППП). Входные языки ППП. Функциональное и системное обеспечение ППП. Средства автоматизации программных разработок.

Влияние архитектурных особенностей ЭВМ на реализацию и эффективность алгоритмов. Реализации алгоритмов на базе матричных и конвейерных процессоров. Особенности реализации алгоритмов в многопроцессорных вычислительных системах.

Логическая организация данных на внешних носителях. Эффективные алгоритмы доступа к данным. Архитектура систем управления базами данных.

II. Рекомендуемая литература

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд., М., ФИЗМАТЛИТ, 2004, 572 с.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд., М., Наука, 1988, 336 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Издательство: Бинوم. Лаборатория знаний, 2003, 640 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989, 616 с.
5. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 2-е изд., Изд-во ВИНТИ, 1994, 214 с.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 5-е изд., Изд-во МГУ, 1999, 799 с.

7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978, 532 с.
8. Ольшанский М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2005, 168 с.
9. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.,Л.: 2-е изд., Физматгиз, 1963, 734 с.
10. Саад Ю. Итерационные методы для разреженных линейных систем. Изд-во МГУ, Том 1, 2013, 344 с., том 2.
11. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 407 с.
12. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно сеточные методы. М., НАУКА, 1981, 416 с.
13. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М., Наука, 1990, 230 с.
14. Борисов В.М. Разработка пакетов программ вычислительного типа. М., Изд-во Моск. Ун-та, 1990.
15. Ван Тассел Д., Стиль, разработка, эффективность, отладка и испытание программ. М., Мир, 1981.
16. Мартин Дж. Организация баз данных в вычислительных системах. М., Мир, 1981.