

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета,  
д.ф.-м.н., член-корр. РАН

*/А.И. Шафаревич/*

«30» сентября 2022 г.

**ПРОГРАММА-МИНИМУМ**

кандидатского экзамена по специальности

***1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика***

Область науки: **1. Естественные науки**

Группа научных специальностей: **1.1. Математика и механика**

Наименование отраслей науки, по которым присуждаются ученые степени:  
**физико-математические науки**

Рабочая программа рассмотрена и одобрена  
Учебно-методической комиссией факультета  
(протокол № 6 от 30 сентября 2022 г.)  
*(При наличии учебно-методической комиссии на факультете)*

Москва 2022

## I. Описание программы:

Настоящая программа охватывает основополагающие разделы теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. Программа состоит из семи разделов: вероятностные меры, случайные величины и распределения, предельные теоремы, случайные процессы, некоторые виды зависимости, стохастические уравнения и диффузионные процессы, элементы математической статистики.

## II. Основные разделы и вопросы к экзамену:

### 1. Вероятностные меры

2. Системы подмножеств (алгебры, сигма-алгебры). Борелевские сигма-алгебры. Примеры измеримых пространств:  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^\infty$ .
3. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова. Основные свойства вероятностной меры.
4. Теорема Каратеодори о продолжении меры. Функция распределения вероятностной меры в  $\mathbb{R}^n$ , взаимно-однозначное соответствие между функциями распределения и вероятностными мерами.
5. Случайные величины и векторы, их основные характеристики. Виды сходимостей: сходимость почти наверное, сходимость по вероятности, сходимость по распределению.
6. Независимость событий и сигма-алгебр. Независимость случайных величин, критерий независимости в терминах функций распределений.
7. Определение интеграла Лебега и его связь с интегралом Лебега-Стилтьеса в  $\mathbb{R}^1$ . Математическое ожидание случайной величины. Замена переменных в интеграле Лебега.
8. Теорема Радона-Никодима. Условные вероятности, условные математические ожидания и условные распределения.
9. Произведения мер. Теорема Фубини.
10. Пространство  $L_p$  случайных величин и его характеристики. Сходимость в пространстве  $L_p$ . Ортогональность или некоррелированность случайных величин. Проекция случайной величины на подпространство, порожденное другими случайными величинами. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

### 2. Случайные величины и распределения в $\mathbb{R}^n$

1. Распределения случайных величин и случайных векторов.
2. Характеристические функции, их свойства. Формулы обращения, равенство Парсевала. Слабая сходимость и теорема непрерывности.
3. Многомерное нормальное распределение. Основные свойства гауссовских случайных векторов.
4. Безгранично делимые распределения: определение, свойства, примеры. Представление Леви-Хинчина логарифма характеристической функции безгранично делимого закона.

### **3. Предельные теоремы**

1. Закон "нуля или единицы". Теоремы Бореля и Колмогорова.
2. Усиленный закон больших чисел для независимых случайных величин (случаи одинаково и не одинаково распределенных случайных величин).
3. Закон повторного логарифма для сумм независимых случайных величин.
4. Теорема Пуассона, оценка скорости сходимости в теореме Пуассона (случаи одинаковых или не одинаково распределенных индикаторов).
5. Центральная предельная теорема (в форме Ляпунова и в форме Линдберга-Феллера).
6. Теорема Берри-Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме.
7. Вероятности больших отклонений сумм независимых случайных величин.

### **4. Случайные процессы. Распределения в функциональных пространствах**

1. Распределения в функциональных пространствах. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях.
2. Гауссовские процессы. Теорема о существовании гауссовского процесса с заданной ковариационной функцией.
3. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс и его свойства. Винеровский процесс и свойства его траекторий.
4. Теорема Колмогорова-Ченцова о модификациях случайных процессов.
5. Стохастический интеграл от неслучайной функции и его основные свойства. Теорема Карунена. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса и его ковариационной функции. Теорема Бохнера-Хинчина.

6. Слабая сходимость, относительная компактность и плотность семейства вероятностных мер. Теорема Прохорова.
7. Непрерывность и дифференцируемость случайной функции. Линейные преобразования стационарных в широком смысле процессов. Линейное прогнозирование, разложение Вольда.
8. Стационарность в узком смысле и эргодичность случайных последовательностей. Теорема Биркгофа-Хинчина.

### **5. Некоторые виды зависимости**

1. Цепи Маркова (с дискретным временем), классификация состояний, условия эргодичности.
2. Цепи Маркова с непрерывным временем, дифференциальные уравнения Колмогорова для переходных вероятностей и распределения цепи. Эргодическая теорема.
3. Марковские процессы, различные определения. Марковские подгруппы. Уравнения Колмогорова.
4. Мартингалы и полумартингалы, теоремы об остановленном мартингалле. Тождество Вальда.
5. Теоремы о сходимости мартингалов.
6. Процессы рождения и гибели: определение, условия эргодичности, предельные распределения, примеры.
7. Ветвящиеся процессы (с дискретным временем и одним типом частиц): определение, условия вырождения, предельные теоремы для числа частиц.

### **6. Стохастические уравнения и диффузионные процессы**

1. Стохастический интеграл Ито. Формула замены переменных Ито.
2. Стохастические дифференциальные уравнения, понятие сильного и слабого решения. Теорема о достаточном условии существования и единственности сильного решения СДУ.

### **7. Элементы математической статистики**

1. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливленко-Кантелли. Критерий Колмогорова.
2. Достаточные статистики и сигма-алгебры. Критерий достаточности Неймана-Фишера. Минимальные достаточные статистики.
3. Теорема Рао-Блекуэлла-Колмогорова и ее использование для построения наилучших статистических оценок.

4. Полнота семейств распределений. Экспоненциальные семейства распределений. Теорема о полных достаточных статистиках в экспоненциальных семействах.
5. Неравенство Крамера-Рао (одномерный и многомерный варианты). Информация Фишера.
6. Методы получения статистических оценок. Метод максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия в условиях регулярности.
7. Наиболее мощный критерий для проверки двух простых гипотез. Лемма Неймана-Пирсона. Равномерно наиболее мощные критерии.
8. Проверка простой гипотезы в полиномиальной схеме Бернулли. Теорема Пирсона о предельном распределении статистики хи-квадрат. Критерий хи-квадрат.
9. Задача регрессии. Линейная регрессионная модель. Метод наименьших квадратов. Линейная регрессия в случае нормального распределения. Доверительные интервалы для параметров линейной регрессии в случае нормального распределения.

### III. Критерии оценивания

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
1	2	3	4
Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Фрагментарные знания в области теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов	Неполные знания в области теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания в области теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов	Сформированные и систематические знания в области теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов

### IV. Рекомендуемая основная литература:

- [1] Ширяев А.Н. *Вероятность*. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2007.
- [2] Боровков А.А. *Теория вероятностей*. 4-е изд. М.: УРСС, 2003.
- [3] Булинский А.В., Ширяев А.Н. *Теория случайных процессов*. М.: Физмат-

лит, 2005.

[4] Вентцель А.Д. *Курс теории случайных процессов*. М.: Физматлит, 1996.

[5] Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей*. 10-е изд. М.: УРСС, 2011.

[6] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. *Введение в математическую статистику*.

М.: ЛКИ, 2010.

#### **V. Дополнительная литература:**

[7] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. М.: Мир, 1984.

[8] Боровков А.А. *Математическая статистика*. 3-е изд. М.: Физматлит, 2008.

[9] Петров В.В. *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*. М.: Физматлит, 1987.

[10] Севастьянов Б.А. *Ветвящиеся процессы*. М.: Наука, 1971.

[11] Энциклопедия "Вероятность и математическая статистика" / Под ред. Ю.В.Прохорова. М.: Российская энциклопедия, 1999.

#### **VI. Авторы временной программы:**

Кафедра теории вероятностей (зав. кафедрой – академик А.Н. Ширяев) и кафедра математической статистики и случайных процессов (зав. кафедрой – профессор А.М. Зубков).