Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»
механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Декан механико-математического
факультета, д.ф.-м.н., профессор,
член-корр. РАН

/Шафаревич А.И./

«30» сентября 2022 г.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Шифр и наименование области науки: **1. Естественные науки**

Наименование отраслей науки, по которым присуждаются ученые степени:

физико-математические науки

Рабочая программа рассмотрена и одобрена
Учебно-методической комиссией факультета
(протокол № 6 от 30 сентября 2022 г)
(При наличии учебно-методической комиссии на факультете)

Москва 2022

I. Описание программы:

Настоящая программа охватывает основополагающие разделы и области знания, в основе данной программы лежат следующие дисциплины: обыкновенные дифференциальные уравнения, теория динамических систем, уравнения математической физики, оптимальное управление, а также ряд отдельных вопросов функционального анализа и теории функциональных пространств.

Основные разделы и вопросы к экзамену:

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1. Теоремы (Пикара, Пеано) существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и их систем. ([3], §3, 20, 21; [5], гл. II, §1, [7], гл.2, §4, 5, 8.)
2. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных условий и параметра. Производная решения по параметру. ([3], §22, 24, 25, [7], гл. 2, § 7, гл.5, § 23.)
3. Теоремы о продолжении решения задачи Коши. ([3], §22, 24, 25, [7], гл. 2, §6.)
4. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Особые решения. ([5], гл. III, [7], гл. 2, §8.)
5. Линейные уравнения высокого порядка. Структура общего решения линейных однородных и неоднородных уравнений. Формула Лиувилля – Остроградского, метод вариации постоянных. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. ([3], §3, 20, 21; [5], гл.V, VI, VII, [7], гл.3, §10-12.)
6. Системы линейных уравнений. Экспонента матрицы. Матрица Коши, формула Лиувилля – Остроградского, методы интегрирования линейных систем с постоянными коэффициентами. ([4], §17, 18; [5], гл. VII, §2, [7], гл.3, §9, 14, 15.)
7. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теория Флоке. ([7], гл.3, §16.)
8. Автономные системы линейных и нелинейных уравнений. Положения равновесия. Предельные циклы. Построение фазового портрета. ([3], §15, 16, [7], гл. 4, §17, 21, 22).
9. Устойчивость по Ляпунову. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по первому приближению. ([3], §26; [5], гл.VII, §6, [7], §18-20).

10. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи. ([7], гл. 4, §13.)
11. Линейные уравнения второго порядка. Нули решений. Теорема сравнения. Теорема Штурма. Достаточные условия колеблемости решений. ([5], гл.IV, §2; [7], гл.3, §12).
12. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных функций ([6], гл. II, §3, п.9).
13. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори ([8], §1).
14. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. ([5], гл.VIII, [7], гл. 5, §26.)

2. Уравнения математической физики

1. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теорема Коши–Ковалевской. ([2], гл. I, §1, [11], §2).
2. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики. ([1], гл. I, §3; [2], гл. I, §2, [6], гл. I, §1,2).
3. Задача Коши для волнового уравнения и методы ее решения. Формулы Даламбера, Пуассона, Кирхгофа. Метод спуска. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.) ([1], гл.II, §5, [2], гл. 1, §2; [6], гл. 2, §2).
4. Смешанные задачи для волнового уравнения. Метод Фурье. ([6], гл. 2, §3).
5. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.) ([2], гл. IV, §3; [10], гл. 3, §28).
6. Задача Коши и смешанные задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.) ([10], гл. IV, §38, 39, 40; [6], гл. 3, §3).
7. Обобщенные функции. Действия с обобщенными функциями. Свертка обобщенных функций, преобразование Фурье. ([1], гл. II, §5-7, 9).
8. Пространства Соболева W_p^m. Теоремы вложения, следы функций из W_p^m на границе области. ([2], гл.3, §5 - 8).
9. Обобщенные решения краевых задач для эллиптического уравнения второго порядка. Вариационный метод решения краевых задач. ([11], гл. 3, §3.13). Краевые задачи на собственные функции и собственные значения ([1], гл.V, §21, [2], гл. IV, §1).

3. Оптимальное управление

1. Теоремы отделимости, теорема Банаха об обратном операторе и следствия из них. Определение производных, основные теоремы дифференциального исчисления в функциональных пространствах. Теоремы о неявной функции и обратном отображении. Теорема Люстерника о касательном пространстве. ([13], стр. 115-182).
2. Принцип Лагранжа для гладких задач. Случай бесконечномерных экстремальных задач с равенствами и неравенствами. Простейшая задача и задача Лагранжа в классическом вариационном исчислении; уравнения Эйлера и Эйлера-Лагранжа ([13], стр. 58, 297-314). Простейшие вариационные неравенства ([17], стр. 157-160).
3. Достаточные условия для бесконечномерных задач с равенствами и неравенствами ([13], стр.287-296). Простейшая задача вариационного исчис-ления: необходимые и достаточные условия экстремума второго порядка.
4. Связь между лагранжианом и гамильтонианом. Уравнение Гамильтона-Якоби. ([9], гл. 3, §3; [13], стр. 370-391).
5. Принцип максимума Понтрягина ([4], гл. I, §1- 4, примеры 1,2; гл. V, §29, 30).
6. Решение конкретных задач вариационного исчисления и оптимального управления и экстремальных задач анализа, геометрии, теории аппроксимации ([15], стр. 421-439; [16], стр. 89-149).
7. Основные понятия выпуклого анализа и формулы выпуклого исчисления. Теоремы о субдифференциале и об очистке. ([13], стр. 208-237; [17], стр. 21-52). Принцип Лагранжа для выпуклых задач. Теорема Куна-Таккера ([13], стр. 52-58).
8. Теоремы двойственности в выпуклом программировании ([14], стр. 110-168; [16], стр. 60-62). Теоремы двойственности и симплекс метод в линейном программировании. Транспортная задача и задача о назначении ([16], стр. 62-65, 80-82, 158-160; [16], стр.94-137).

3. Теория динамических систем

1. Общее понятие структурной устойчивости. Критерий Андронова-Понтрягина структурной устойчивости векторных полей на сфере ([12], §10).
2. Диффеоморфизмы окружности: число вращения; диффеоморфизмы с рациональным числом вращения. Теорема о равномерном распределении для иррациональных поворотов окружности. Теорема Данжуа (без доказательства). Описание структурно устойчивых диффеоморфизмов окружности ([12], §11).
3. Структурная устойчивость аносовского диффеоморфизма тора. Определение диффеоморфизмов Аносова и формулировка теоремы об их структурной устойчивости ([12], §§13,14).

4. Общая задача теории бифуркаций. Лемма Сарда. Теорема трансверсальности. Семейства общего положения. Бифуркация Андронова – Хопфа ([12], §§10, 29, 33).
5. Системы, сохраняющие меру, эргодичность. Возвращаемость по Пуанкаре. Эргодическая теорема.

II. Критерии оценивания

Критерии и показатели оценивания ответа на экзамене			
1	2	3	4
Неудовлетворительно	**Удовлетворительно**	**Хорошо**	**Отлично**
Фрагментарные знания актуальных проблем и тенденций в развитии теории дифференциальных уравнений и математической физики	Неполные знания актуальных проблем и тенденций в развитии теории дифференциальных уравнений и математической физики	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания актуальных проблем и тенденций в развитии теории дифференциальных уравнений и математической физики	Сформированные и систематические знания актуальных проблем и тенденций в развитии теории дифференциальных уравнений и математической физики

III. Рекомендуемая основная литература:

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Физматлит, 1988.
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1998.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1963.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - Изд-во ЛКИ, 2008.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Изд-во МГУ, 2004.
7. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: УРСС, 2007.
8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М.: Физматлит, 1985.

9. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. - Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.
10. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1971.
11. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. - М.: Изд-во МГУ, 2005.
12. Арнольд В.И. Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
13. Алексеев В.М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. - М.: Наука, 1979.
14. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.
15. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.
16. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. - М.: Эдиториал УРСС, 2002.
17. Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В. и др. Оптимальное управление. - М.: МЦНМО, 2008.
18. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. - М.: Факториал, 1999.

IV. Дополнительная литература:

1. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. - М.: Наука, 1978 г.
2. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под ред. Владимирова В.С. М.: Физматлит, 2003.
3. Лакс П. Гиперболические уравнения с частными производными. - М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010.
4. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин А.Г. Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка. – М: МГУ, 1999.
5. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002.
6. Villani C. Topics in optimal transportation. Graduate studies in mathematics. Vol. 58, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2003.
7. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
8. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010.
9. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
10. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение: М.: Наука, 1970.
11. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
12. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

13. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика,2003.
14. Курант Р. Уравнения в частных производных. М.: Мир, 1964.
15. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Физматлит. 1977.

V. Авторы программы:

Асташова И.В.

Бадерко Е.А.

Быков В.В.

Давыдов А.А.

Сергеев И.Н.