

Дополнительные главы математического анализа

1. Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций.
2. Кривые в многомерном пространстве. Теорема о длине дуги кривой. Мера Жордана. Измеримость спрямляемой кривой. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.
3. Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Производная по направлению. Градиент.
4. Частные производные высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка. Формулы Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа.
5. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.
6. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.
7. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
8. Теоремы Остроградского и Стокса. Дивергенция. Вихрь.

Дополнительные главы алгебры

1. Понятие группы, примеры групп, теорема Лагранжа и следствия из нее.
2. Теорема о гомоморфизме для групп.
3. Поле. Примеры полей (конечных и бесконечных). Расширения полей. Алгебраические расширения. Теорема о том, что конечное расширение является алгебраическим.
4. Кольца, примеры колец. Идеалы, теорема о гомоморфизме для колец.
5. Теорема о башне полей.

Дополнительные главы дифференциальной геометрии

1. Параметризованная регулярная кривая, регулярная замена параметра, длина кривой натуральный параметр. Формулы Френе на плоскости и в пространстве. Кривизна и кручение в произвольном параметре.
2. Первая и вторая квадратичная формы поверхности. Изометрии поверхности. Главные кривизны, гауссова и средняя кривизны. Теорема Миньери, теорема Эйлера.
3. Дериационные формулы Гаусса-Вейнгартена, теорема Гаусса.
4. Ковариантная производная векторного поля на поверхности; параллельный перенос, геодезические на поверхностях.

Дискретные математические модели

1. Функции алгебры логики. Операция суперпозиции. Полные системы. Теорема Поста о полноте системы функций алгебры логики.
2. Функции k -значной логики. Операция суперпозиции. Полные системы. Теорема Кузнецова о полноте.
3. Операции суперпозиции и композиции. Структурные автоматы. Теорема о неполноте конечных систем относительно операции суперпозиции. Конечные системы, полные относительно операции композиции.
4. Схемы из функциональных элементов. Понятие сложности схемы. Асимптотика функции Шеннона сложности схем из функциональных элементов.

**ПРОГРАММА ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО НАПРАВЛЕНИЮ МАГИСТРАТУРЫ
«МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»
2021 ГОД**

Дополнительные главы математического анализа

1. Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций.
2. Кривые в многомерном пространстве. Теорема о длине дуги кривой. Мера Жордана. Измеримость спрямляемой кривой. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.
3. Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Производная по направлению. Градиент.
4. Частные производные высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка. Формулы Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа.
5. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.
6. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.
7. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
8. Теоремы Остроградского и Стокса. Дивергенция. Вихрь.

Алгебра и геометрия

1. Билинейные симметрические функции, квадратичные формы. Матрица билинейной функции, её изменение при заменах координат. Приведение формы к каноническому виду над вещественными и комплексными числами методом Лагранжа. Ранг и индекс инерции квадратичной формы над вещественными числами. Инвариантность индекса инерции.
2. Связность на поверхности в R^3 (геометрическое определение и основные свойства); определение геодезической и параллельного переноса вдоль кривой на поверхности. Примеры: геодезические на плоскости, сфере, цилиндре.
3. Системы линейных уравнений, ранг, размерность пространства решений, метод Гаусса решения систем.
4. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы при замене базиса. Собственные значения и собственные вектора.
5. Формулы Френе. Натуральное уравнение кривой в трехмерном пространстве. Теорема существования и единственности кривой с данными кривизной и кручением.
6. Первая и вторая квадратичная формы поверхности. Изометрии поверхности. Главные кривизны, гауссова и средняя кривизны. Теорема Минье, теорема Эйлера.

Подгруппа «Навигация и управление»

1. Теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению. Критерий Гурвица (без доказательства). Запас устойчивости.
2. Управляемость. Грамиан управляемости. Критерий управляемости для стационарных управляемых систем. Декомпозиция по управлению. Инвариантные управляемые подпространства.
3. Наблюдаемость. Грамиан наблюдаемости. Критерий наблюдаемости для стационарных систем. Декомпозиция по наблюдению. Инвариантные наблюдаемые подпространства.
4. Стабилизация по оценке. Алгоритм стабилизации по оценке. Уравнения ошибок. Условия устойчивости замкнутой системы и теорема разделения. Необходимые и достаточные условия стабилизируемости по оценке.
5. Решение переопределенных систем линейных алгебраических уравнений. МНК.
6. Дискретный, непрерывный фильтр Калмана.
7. Условия устойчивости фильтра Калмана. Стационарный фильтр Калмана при бесконечном времени наблюдения.
8. Формулировка принципа максимума Понтрягина для оптимизации прихода на многообразии.
9. Оптимальная стабилизация при неограниченных ресурсах управления.
10. Оптимальная стабилизация линейной стохастической системы. Совместная задача управления и оценивания. Теорема о разделимости.