Кафедра общей топологии и геометрии.

Становление топологии, как самостоятельной области математики, относят к началу XX века. Первооткрывателями многих важнейших направлений топологии были выдающиеся математики Павел Сергеевич Александров (1896–1982) и Павел Самуилович Урысон (1898–1924). Ими в Московском университете был организован в 1924 г. первый в нашей стране научно-исследовательский семинар по топологии. Московская топологическая школа по праву считается одной из сильнейших в мире. В память об основателе московской топологической школы Павле Сергеевиче Александрове на механико-математическом факультете МГУ при участии Московского математического общества ежегодно в конце мая проводится топологическая конференция "Александровские чтения".

Кафедра общей топологии и геометрии была создана на мехмате МГУ в 1982 году. В настоящее время на кафедре работают 8 докторов наук и 7 кандидатов наук. Заведующий кафедрой д.ф.-м.н. Садовничий Юрий Викторович.

Научные исследования, проводимые на кафедре, охватывают чрезвычайно широкий спектр направлений, относящихся как к традиционным вопросам общей топологии, так и к ее приложениям в других областях математики; разрабатываются новые перспективные области. Учеными кафедры были получены фундаментальные результаты в теории ковариантных функторов (в частности, вероятностных мер), в топологической алгебре, в теории размерности, в теории топологических многообразий, в топологической динамике. Существенные продвижения были достигнуты в топологии тихоновских произведений и гиперпространств, в теории пространств непрерывных функций, в послойной общей топологии, разработан новый подход к теории дифференциальных уравнений, основанный на топологических методах.

Профессорско-преподавательским составом кафедры читаются общеобразовательные курсы по аналитической геометрии, линейной алгебре, введению в топологию и различные специальные курсы, проводятся специальные семинары. Среди них имеются как ориентированные на студентов младших курсов и дающие введение в классическую общую топологию и теорию множеств, так и содержащие изложение новейших достижений и открытых проблем в современных направлениях топологии. Многие результаты научных исследований сотрудников кафедры приобрели мировую известность, докладывались на международных конференциях. Некоторые из них были получены в ходе совместной научной работы с зарубежными учеными.

Садовничий Юрий Викторович д.ф.м.н., профессор, заведующий кафедрой.

Области научных интересов:

Вероятностные и борелевские меры, функторы, равномерные пространства, размерность.

Федорчук В.В., Филиппов В.В. «Общая топология. Основные конструкции». Классический университетский учебник. Москва, Физматлит, 2006.

Ю.В. Садовничий. «О метрике на пространствах вероятностных мер». Вест. Моск. Ун-та. Сер.1 Мат. Мех. 1994 №4.

Ю.В. Садовничий. «Поднятие функторов U_tau и U_R на категорию ограниченных метрических пространств и категорию равномерных пространств». Математический сборник. 2000, Том 191, №11.

Контакты

https://istina.msu.ru/profile/uvs/

e-mail: sadovnichiy.yu@gmail.com

Темы исследований:

Для каждого ли тихоновского пространства множество вероятностных радоновых мер на нем барицентрично?

Изоморфна ли категория алгебр функтора вероятностных радоновых мер категории, объектами которой являются выпуклые ограниченные барицентрические множества в локально-выпуклых пространствах, а морфизмами – аффинные непрерывные отображения.

Козлов Константин Леонидович д.ф.м.н., профессор

Области научных интересов:

Топологические группы преобразований. Созданная С. Ли теория непрерывных групп оказала глубокое влияние на развитие оснований геометрии, топологии, теоретической физики. Группы преобразований топологических пространств (и изометрий метрических пространств) относятся к «большим» группам, теория которых в настоящее время активно выстраивается.

Однородные топологические пространства. Построенная теория гомеоморфизмов пространств, близких к топологическим многобразиям (конечным и бесконечным), позволила охарактеризовать n-мерные и гильбертовы многообразия, менгеровские компакты, пространства Небелинга, пространства Эрдеша. Если группу гомеоморфизмов (общего топологического) пространства наделить топологией, в которой ее действие становится непрерывным, то как сама топология группы преобразований, так и свойства действия становятся мощными исследовательскими инструментами в изучении взаимных связей между топологическими свойствами пространства, его группы преобразований и ее действия.

Теория размерности. Определение и изучение размерности (числовых топологических инвариантов) все более общих классов топологических пространств.

Контакты

https://istina.msu.ru/profile/kkozlov

e-mail: kkozlov@mech.math.msu.su

Темы исследований:

Нахождение топологических групп, реализующих однородность пространства. В частности, всякое ли алгебраически однородное (полно) метризуемое пространство является факторпространством (полно) метризуемой топологической группы?

Выявление топологических свойств пространств, однородность которых реализуется группами из определенного класса. В частности, будет ли компактное факторпространство подгруппы произведения полных по Чеху групп, компактом Дугунджи?

Исследование топологических свойств групп гомеоморфизмов (в допустимых топологиях) однородного не алгебраически однородного компакта Федорчука, однородного не алгебраически однородного польского пространства в примере ван Милла.

Монотонна ли топологическая размерность dim по подгруппам топологической группы?

Филиппов Владимир Васильевич д.ф.м.н., профессор.

Области научных интересов:

Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

В.В.Филиппов, Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений, издательство МГУ, 1993, есть в библиотеке факультета и в Интернете.

V.V.Filippov, Basic topological structures of ordinary differential equations, издательство Kluwer, 2003, есть в Интернете.

Контакты

https://istina.msu.ru/profile/Filippov_V_V/

e-mail: vvfil@mech.math.msu.su

Темы исследований:

Исследование уравнений с разрывной правой частью и с многозначной правой частью (дифференциальных включений) на предмет существования решений и непрерывности зависимости решений, от параметров правой части, см. указанные книги.

Ставрос Димитрис Илиадис д.ф.м.н., профессор.

Области научных интересов:

Построение универсальных объектов с помощью метода Содержащих Пространств, развитый в работах [1] и [2].

Пусть задан класс топологических пространств. Некоторое пространство называется *универсальным* в этом классе, если оно принадлежит этому классу и содержит гомеоморфный образ всякого другого элемента этого класса. Например, гильбертово пространство является универсальным для класса всех регулярных пространств со счетным весом. Проблемы существования универсальных элементов возникли с самого начала развития Топологии и возникают всякий раз с рассмотрением новых классов топологических пространств. Универсальные объекты можно рассматривать не только в категории топологических пространств, но и в любой категории, где определено понятие вложения. Такими категориями могут быть, например, категория решеток, категория отображений пространств, категория метрических пространств, категория пространств с заданной размерности, категория G-пространств и др. Категория топологических групп, где в качестве вложений рассматриваются изоморфизмы, также может быть таким примером. Существуют нерешенные проблемы связанные с универсальными элементами в классах топологических групп. Например, открыт вопрос о существования универсального элемента в классе всех топологических групп несчетного веса [7]. Некоторые открытые проблемы указаны в работе [3]. В связи с этим вопросом возник новый класс пространств, так называемых пространств, непрерывно содержащие топологические группы, которые сейчас интенсивно изучаются. Ниже указаны некоторые работы связанные с этими пространствами.

1. Stavros Iliadis, *A construction of containing spaces*, Topology and its Applications 107 (2000) 97-116.

2. S.D. Iliadis, *Universal Spaces and Mappings*, North-Holland Mathematics Studies 198, Elsevier (2005).

3. Stavros Iliadis, *On embeddings of topological groups,* Fundamental and Applied Mathematics, Vol 20, No.2 (2015), pp. 105-112 (Russian). Journal of Mathematical Sciences (2017), 223:6, 720-724 (English).

4. S. Iliadis, *On embeddings of topological groups II*, Topology and its Applications, 201 (2016), 457-461.

5. Stavros Iliadis, *On spaces continuously containing topological groups*, Topology and its Applications, 272 (2020)

6. Stavros Iliadis, *On actions of spaces continuously containing topological groups*, Topology and its Applications 275 (2020).

V.V. Uspenskij, *On the group of isometries of the Urysohn universal metric space*, Comment.Math.Univ.Carolinae 31, 1 (1990), 181-182.

Контакты

https://istina.msu.ru/profile/s.d.iliadis/

e-mail: s.d.iliadis@gmail.com

Комбаров Анатолий Петрович д.ф.м.н., профессор.

Области научных интересов:

Основные результаты А.П.Комбарова связаны с исследованием топологических свойств, близких к свойствам нормальности и счетной паракомпактности, в пространствах, возникающих при различных топологических конструкциях, в частности, в произведениях, в Σ-произведениях, в гиперпространствах. Понятие нормальности (то есть функциональной отделимости непересекающихся замкнутых множеств) находится на границе, где теоретико-множественная топология переходит от математического анализа к теории множеств. Естественной задачей общей топологии является задача выяснения границ действия многих классических результатов, вовлекающих свойства нормальности или счетной паракомпактности, когда эти свойства заменяются на топологические свойства, близкие к упомянутым. А.П.Комбарову принадлежат новые характеристики компактности в терминах свойств типа нормальности больших степеней пространства и гиперпространств, а также их функториальных обобщений. Теория гиперпространств оказалась чрезвычайно полезной для такого важного и интенсивно развивающегося в последние годы направления общей топологии, как изучение геометрических свойств ковариантных и, в частности, нормальных функторов. Многие конструкции общей топологии имеют функториальный характер: они определены не только для пространств, но и для отображений. А.П.Комбаровым также предложен новый подход к изучению сходимости в топологических пространствах, позволивший дать тонкую классификацию секвенциальных пространств, топология которых определяется сходящимися последовательностями, и пространств счетной тесноты, топология которых определяется счетными подпространствами, подход, позволивший дать единое описание свойств типа компактности с помощью понятий секвенциальности и компактности по множеству свободных ультрафильтров, понятий, пришедших в общую топологию из нестандартного анализа.

Список статей А.П. Комбарова на стр. http://istina.msu.ru/profile/KombarovAP/

Контакты

https://istina.msu.ru/profile/KombarovAP/

e-mail: apkombarov@gmail.com

Темы исследований:

Студентам, предполагающим выбрать кафедру ОТиГ, будет полезно ознакомиться с замечательной книгой Энгелькинга Р. «Общая топология», которая является и учебником, и справочником, и сборником упражнений и задач, многие из которых могут послужить основой для курсовой работы. Полистать книгу Энгелькинга можно на странице
https://edu-lib.com/matematika-2/dlya-studentov/engelking-r-obshhaya-topologiya-onlayn

Сипачёва Ольга Викторовна д.ф.м.н., в.н.с.

Области научных интересов:

Я занимаюсь *топологической алгеброй*, в основном *теорией топологических групп*. Группа *G* с топологией T называется топологической группой, если обе операции на *G* (умножение и операция взятия обратного элемента) непрерывны. При этом топология T называется групповой топологией. Разумеется, вместо групп можно рассматривать любые другие алгебраические структуры (полугруппы, кольца, векторные пространства) и требовать непрерывность их операций. Например, топологическая полугруппа — это полугруппа с топологией, относительно которой умножение непрерывно.

Оказывается, топологическая и алгебраические структуры, согласованные таким образом, оказывают друг на друга очень сильное влияние. Например, существуют группы, на которых вообще нельзя ввести нетривиальную топологию (правда, устроены эти группы очень сложно, но и очень интересно), а любая компактная топологическая полугруппа обязана содержать идемпотент. С другой стороны, если топологическая группа удовлетворяет аксиоме отделимости T_0, то она непременно вполне регулярна, и всякая топологическая группа с первой аксиомой счетности метризуема.

Особое место в топологической алгебре занимает теория полугрупп ультрафильтров. На множестве βX всех ультрафильтров на произвольном множестве *X* имеется естественная компактная топология, и если *X* — полугруппа, то с помощью этой топологии полугрупповую операцию удается продолжить до непрерывного по первому умножения на βX . Этого уже достаточно для существования идемпотента и минимального идеала, а с их помощью можно просто и изящно доказать многие комбинаторные теоремы о раскрасках бесконечных множеств, а также многие факты из топологической динамики. Сами по себе ультрафильтры тоже весьма интересны во многих аспектах — во-первых, существование ультрафильтров с естественными простыми свойствами очень часто не зависит от аксиом теории множеств (т.е. в некоторых моделях теории множеств такие ультрафильтры существуют, а в других моделях их нет), во-вторых, имеются естественные конструкции, позволяющие строить по ультрафильтрам топологические группы с экзотическими свойствами, в-третьих, понятие ультрафильтра играет центральную роль в методе вынуждения (который был изобретен для решения первой проблемы Гильберта — доказательства независимости от аксиом теории множеств континуум-гипотезы), и, наконец, весь нестандартный анализ основан на использовании ультрафильтров.

Книг по топологической алгебре, которые в достаточной мере освещают интересующие меня аспекты, нет. Основная часть информации рассеяна по многочисленным статьям. Некоторое представление дают книги

- Э. Хьюитт, К. Росс. *Абстрактный гармонический анализ*, Т.1. — М.: Наука, 1975, §4–8.
- А. В. Архангельский, «Алгебраические объекты, порожденные топологической структурой» // *Итоги науки и техники. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия*, **25**. – М.: ВИНИТИ, 1987, С. 141–198.

Наиболее информативная книга по алгебре ультрафильтров —

- N. Hindman, D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech Compactification: Theory and Applications*. — Berlin–Boston: De Gryuter, 2012.

Контакты

https://istina.msu.ru/profile/sipacheva/

e-mail: o-sipa@yandex.ru

Темы исследований:

Очень мало известно о существовании топологий, согласованных с алгебраическими структурами. Примеры нетопологизируемых групп есть, однако условия на группу, достаточные для существования нетривиальной групповой топологии, изучены очень мало. Традиционный интерес вызывают также вопросы, связанные с топологическими свойствами произведений топологических групп, поскольку в этом отношении топологические группы сильно отличаются от общих топологических пространств. Мало известно также о свойствах булевых топологических групп, которые находятся на стыке топологической алгебры и теории множеств (любая такая группа есть семейство всех конечных подмножеств некоторого множества с операцией симметрической разности). Наконец, чрезвычайно трудна и перспективна проблема существования и изучения топологических групп с экстремальными свойствами, например, групп с максимальной (в том или ином смысле) групповой топологией, экстремально несвязных групп и пр.

Фролкина Ольга Дмитриевна к.ф.м.н., доцент.

Области научных интересов:

Геометрическая топология, геометрия евклидовых пространств, вложения в евклидовы пространства, дикие и ручные вложения, теорема Бэра о категории (типичные свойства множеств, пространств и отображений)

Контакты

https://istina.msu.ru/profile/olga-frolkina/

e-mail: olga-frolkina@yandex.ru

Темы исследований:

Оказывается, в очень многих ситуациях «хорошие» объекты редки. С точки зрения категории Бэра «большинство» непрерывных функций нигде не дифференцируемы; «большинство» компактов в R^n гомеоморфны канторову множеству; «большинство» узлов в R^3 являются дикими; «большинство» выпуклых тел в R^3 удерживаются некоторым обручем, имеющим форму окружности. Актуальны слова А.Пуанкаре (1905): «Логика приводит часто к уродствам. На протяжении полувека мы видели, как возникло множество причудливых функций; эти новые функции как будто старались возможно менее походить на те благородные функции, которые чему-нибудь да служат. Таковы, например, функции непрерывные, но без производных, и т.д. Более того, с точки зрения логической эти именно причудливые функции и являются наиболее общими; те же функции, которые мы находим без долгих поисков, образуют как бы частный случай. Для них остается лишь маленький уголок». В качестве курсовых работ предлагается, например, рассмотреть типичное поведение выпуклых и звездных тел в R^n; компактов, континуумов, канторовых множеств в R^n; эти объекты уже изучались разными авторами, но многие вопросы открыты.

Литература:

1) А. Пуанкаре. Наука и метод // О науке. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990.

2) Дж. Окстоби. Мера и категория. М.: Мир, 1974.

Мычка Евгений Юрьевич к.ф.м.н., с.н.с.

Области научных интересов:

В рамках аксиоматической теории ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений) можно изучать следующие задачи:

А) Исследование устойчивости решения; Б) Исследование гомологических свойств решений. С аксиоматической теорией и её методами исследования можно ознакомиться по следующим источникам:

1. Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — Издательство МГУ Москва, 1993. — 335 с.
2. V.V.Filippov, Basic topological structures of ordinary differential equations, Dordrecht-Boston-London, Kluwer, 1998
3. Мычка Е.Ю., “О строении окрестности изолированной стационарной точки локальной динамической системы на плоскости”, Дифференциальные уравнения, **47**:2 (2011), 195–208
4. Filippov V. V. Partial mappings, Čech homology and ordinary differential equations // Topology and its Applications. — 2017. — Vol. 221. — P. 647–655.
5. Мычка Е. Ю., Филиппов В. В. О теоремах Каратеодори и Плиша-Дэви, регуляризации по Красовскому и непрерывности зависимости решений от параметров правой части // Проблемы математического анализа. — 2019. — № 97. — С. 91–101.

Контакты

https://istina.msu.ru/profile/MychkaE.Yu./

e-mail: mychkaevg@mail.ru

Темы исследований:

I. (Задача В. М. Миллионщикова) Для всякого целого $k > 2$ выяснить, устойчиво ли нулевое решение

$$x^{(k)} + \left(\cos t + \sin\sqrt{2}t\right)x = 0.$$

II. (Задача А. Ф. Филиппов) Пусть $\mathrm{F}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ — компакт в R^{n}, непрерывно зависящий от (t,x). Пусть все решения дифференциального включения $\mathrm{x} \in \mathrm{F}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ с начальным условием $\mathrm{x}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{x}_0$ существуют при $\mathrm{t}_0 < t < \mathrm{t}^*$ и $\mathbf{M}$ — интегральная воронка точки $(\mathrm{t}_0,\mathrm{x}_0)$, $\mathrm{A}(\mathrm{t}_1)$ — сечение этой воронки плоскостью $\mathrm{t} = \mathrm{t}_1$, M^+ и M^- — части воронки $\mathbf{M}$, лежащие в полупространствах $\mathrm{t}_1 \le \mathrm{t}$ и $\mathrm{t} \le \mathrm{t}_1$ соответственно. *Верхним касательным конусом* к множеству B в точке x называется множество

$$\mathrm{T}(\mathrm{B},\mathrm{x}) = \overline{\lim_{\mathrm{h}\to+0}} \frac{1}{\mathrm{h}}(\mathrm{B}-\mathrm{x}).$$

Известно, что при $\mathrm{x}_1 \in \mathrm{A}(\mathrm{t}_1)$ $\mathrm{T}(\mathrm{M}^+,(\mathrm{t}_1,\mathrm{x}_1))$ есть множество, сечение которого плоскостью $\tau = \mathrm{t} - \mathrm{t}_1$ выражается формулой $\mathrm{T}(\mathrm{A}(\mathrm{t}_1),\mathrm{x}_1) + (\mathrm{t}-\mathrm{t}_1)\mathrm{F}(\mathrm{t}_1,\mathrm{x}_1)$.
1. Описать множество $\mathrm{T}(\mathrm{M}^-,(\mathrm{t}_1,\mathrm{x}_1))$.
2. При каких условиях (без предположения выпуклости $\mathrm{F}(\mathrm{t},\mathrm{x})$ и $\mathrm{A}(\mathrm{t})$) верхний касательный конус к $\mathrm{A}(\mathrm{t}_1)$ в точке $\mathrm{x}_1 \in \partial\mathrm{A}(\mathrm{t}_1)$ совпадает с нижним, определяемым аналогично, но с $\underline{\lim}$ вместо $\overline{\lim}$?

III. Известно, что в некоторых случаях линейные и квазилинейные ДУ первого порядка в частных производных сводятся к ОДУ. Таким образом, представляется целесообразным распространить на такие уравнения аксиоматическую теорию ОДУ.

Шавгулидзе Наталия Евгеньевна к.ф.м.н., ассистент.

Области научных интересов:

Упорядоченные алгебраические системы, решеточно упорядоченные группы, кольца, модули. Радикалы колец и модулей над кольцами.

- Л. Фукс, Частично упорядоченные алгебраические системы, Наука, М., 1965.
- Г. Биркгоф, Теория решеток, Мир, М., 1984.
- В.И. Арнаутов, В.И. Водинчар, А.В. Михалев, Введение в теорию топологических колец и модулей, Штиинца, Кишинев, 1981

Контакты

https://istina.msu.ru/profile/Natalia_Shavgulidze/

e-mail: nathalia_s@mail.ru

Темы исследований:

Задание топологии в решеточно упорядоченных кольцах.

Славина Нина Сергеевна к.ф.м.н., ассистент.

Области научных интересов:

Интегрируемые гамильтоновы системы, топологическая классификация и лиувиллева эквивалентность интегрируемых систем.

1. А.В.Болсинов, А.Т. Фоменко «Интегрируемые гамильтоновы системы», Удмуртский университет, 1999г.
2. А.Т.Фоменко, Х.Цишанг «Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы», Изв. АН СССР, сер.матем., 53:3 (1990), 546-575.
3. А.А.Ошемков, Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела, Труды Семинара по векторному и тензорному анализу, 25:2 (1993), 23-109.

Контакты

https://istina.msu.ru/profile/SlavinaNS/

e-mail: Slavinanina@list.ru

Темы исследований:

В случае задач, возникающих в динамике твердого тела, вычислять инварианты Фоменко-Цишанга (с помощью построенных допустимых систем координат и определения взаимного расположения базисных циклов). Среди на найденных слоений находить слоения, которые эквивалентны ранее изученным слоениям, возникшим в известных ранее случаях интегрируемости твердого тела. Обнаружить новые слоения.