Методическое пособие по вычислению пределов для первого курса механико-математического факультета МГУ

Ю. Н. Сударев

Хорошо известны следующие правила работы с пределами:

$$\begin{aligned} \text{если} \qquad & \lim_{x\to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b, \qquad \text{то} \\ & \lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b, \\ & \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab, \\ & \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Однако, в подавляющем большинстве задач (например, из задачника Б. П. Демидовича) непосредственно применить формулы (1) не удаётся. Поэтому существуют приёмы различного уровня сложности, позволяющие справиться с такими задачами.

На первом, самом простейшем, уровне мы преобразуем данное выражение так, чтобы можно было применить формулы (1).

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x + 1}{x^3 + 20x^2 + 1000}$$

Здесь числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, т. е. не имеют настоящего предела и, следовательно, формулы (1) не применимы. Поступим следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 10x^2 + 8x + 1}{x^3 + 20x^2 + 1000} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{10}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{20}{x} + \frac{1000}{x^3}} = \frac{2}{1} = 2 \ .$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x} \quad .$$

Здесь числитель и знаменатель стремятся к нулю и, следовательно, формулы (1) снова не применимы.
Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}\right)\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}{x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}\right)^2-\left(\sqrt{1-3x}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)-(1-3x)}{x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-3x}\right)}=\frac{5}{2}\ .$$

Подобные приёмы, однако, можно применять лишь в простейших случаях.

На следующем, более высоком, техническом уровне мы используем понятие эквивалентных величин.

Рассмотрим семейство функций, определённых в проколотой окрестности точки x_0 и отличных от нуля в этой окрестности.

Будем говорить, что функция $\alpha(x)$ эквивалентна $\beta(x)$ $(\alpha\sim\beta)$ при $x\to x_0$, если

$$\alpha(x)=\beta(x)q(x),\ \text{где}\ \lim_{x\to x_0}q(x)=1\ . \tag{2}$$

Очевидно, что (2) равносильно следующему условию:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\ . \tag{3}$$

Перечислим свойства эквивалентных величин, которые немедленно вытекают из их определения.

1. $\alpha \sim \alpha$ (рефлексивность) .
2. Если $\alpha \sim \beta$, то и $\beta \sim \alpha$ (симметрия) .
3. Если $\alpha \sim \beta$, а $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$ (транзитивность) .
4. Если $\alpha \sim \beta$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = a$, то и $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = a$.
5. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \ (c \neq 0)$, то $f(x) \sim c$.
6. Если $f(x) \sim \alpha(x), \ g(x) \sim \beta(x)$, то
$$f(x)g(x) \sim \alpha(x)\beta(x),$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$
$$f^p(x) \sim \alpha^p(x) \quad (f(x) > 0) \ .$$

Покажем, например, что при $x \to \infty$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \sim a_0x^n \qquad (a_0 \neq 0) \, . \tag{4}$$

Действительно,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = a_0x^n \left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \cdots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right) \, .$$

Выражение, стоящее в скобках, стремится к единице и, следовательно, (4) верно по определению эквивалентных.

В курсе математического анализа устанавливается, что справедлива следующая таблица эквивалентных при $x \to 0$:

$$\begin{array}{ll} 1.\ \sin x \sim x & 5.\ 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \\ 2.\ \operatorname{tg} x \sim x & 6.\ \ln(1+x) \sim x \\ 3.\ \arcsin x \sim x & 7.\ a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0,\ a \neq 1) \\ 4.\ \operatorname{arctg} x \sim x & 8.\ (1+x)^p - 1 \sim px \quad (p \neq 0) \end{array} \tag{5}$$

Основная идея применения эквивалентных для вычисления пределов состоит в том, что, заменяя некоторые выражения на более простые эквивалентные, мы приходим в конце концов к такому выражению, предел которого очевиден.

Пример 3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 3x^2}{\left(\sqrt[3]{1+3x} - 1\right) \operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\left[(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1\right] x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{\frac{1}{3}(3x)} = 3$$

Здесь мы использовали таблицу (5) и свойства эквивалентных.

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)+(1-\cos x)}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,.$$

Мы разбили предел в сумму двух пределов, а не заменили сразу каждую скобку в числителе на эквивалентные, поскольку замена на эквивалентные слагаемых в сумме незаконна.

Пример 5.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x}=$$
$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos 2x-1)]}{x^2}}=$$
$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{(2x)^2}{2}}{x^2}}=e^{-2}\,.$$

Здесь, перенеся предел в показатель степени, мы воспользовались теоремой о предельном переходе под знаком непрерывной функции.

Применение эквивалентных значительно расширяет наши возможности при вычислении пределов, однако, в сложных задачах и этой техники оказывается недостаточно.

Третий, самый сложный, уровень приёмов вычисления пределов связан с асимптотическими разложениями функций. Но, прежде всего, нам нужно освоить так называемую «о-символику», которую ввёл в математику в 30-х годах прошлого века немецкий математик Эдмунд Ландау.

Мы снова рассматриваем функции, определённые в проколотой окрестности точки x_0. Скажем, что функция $\alpha(x)$ есть «о-малое от $\beta(x)$ » ($\alpha=o(\beta)$), если справедливо соотношение

$$\alpha(x)=\beta(x)\cdot\omega(x),\qquad \text{где}\quad \lim_{x\to x_0}\omega(x)=0\,. \tag{6}$$

Если, например, речь идёт о бесконечно малых, то равенство $\alpha=o(\beta)$ означает, что $\alpha(x)$ стремится к нулю быстрее, чем $\beta(x)$, т. е. является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$.

Если же речь идёт о бесконечно больших, то это равенство означает, что $\alpha(x)$ растёт медленней, чем $\beta(x)$.

Отметим, между прочим, важную вещь. Если $p > q$, то

$$x^p = o\left(x^q\right) \text{ при } x \to 0 \quad \text{и} \quad x^q = o\left(x^p\right) \text{ при } x \to \infty\,. \tag{7}$$

Заметим ещё, что равенство $\alpha = o(\beta)$ означает, на самом деле, принадлежность $\alpha(x)$ к некоторому классу функций. Поэтому каждый раз, когда появляется символ $o(\beta)$, он означает, вообще говоря, свою функцию из данного класса. Отсюда возникает «странная арифметика».

Например,

$$o(\beta) - o(\beta) = o(\beta),$$

а не ноль, как можно было бы подумать.

Перечислим некоторые правила действий с символом $o(\beta)$, которые легко выводятся из определения (6).

$$\begin{array}{ll} 1. & \alpha \sim \beta \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \alpha = \beta + o(\beta)\,. \\ 2. & o(\beta) \pm o(\beta) = o(\beta)\,. \\ 3. & Ao(\beta) = o(\beta)\,. \\ 4. & o(k\beta) = o(\beta)\,. \\ 5. & \text{Если} \quad \alpha \sim \beta, \quad \text{то} \quad o(\alpha) = o(\beta)\,. \\ 6. & o\left(o(\beta)\right) = o(\beta)\,. \end{array} \tag{8}$$

Кроме символа о-малое, вводится ещё и символ О-большое.

По определению $\alpha(x)$ есть О-большое от $\beta(x)$ ($\alpha = O(\beta)$), если в проколотой окрестности x_0 справедливо соотношение

$$|\alpha(x)| \leqslant C\,|\beta(x)| \tag{9}$$

В случае бесконечно малых (9) означает, что $\alpha(x)$ убывает не медленней, чем $\beta(x)$, а в случае бесконечно больших это означает, что $\alpha(x)$ растёт не быстрее, чем $\beta(x)$.

Для символа $O(\beta)$ справедливы также все соотношения, аналогичные (8). Отметим ещё, что $o\left(O(\beta)\right) = o(\beta)$ и $O\left(o(\beta)\right) = o(\beta)$.

Следует довести работу с символами «о-малое» и «О-большое» до автоматизма, на что потребуется определённое время.

Отметим ещё, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(\beta)}{\beta} = 0\,.$$

Действительно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(\beta)}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)\omega(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0\,. \tag{10}$$

Мы скажем, что функция $f(x)$ раскладывается при $x \to 0$ в асимптотический степенной ряд и запишем

$$f(x) \approx a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad , \tag{11}$$

если для любого n справедливо соотношение

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)\,. \tag{12}$$

Из (12) легко вывести и другое соотношение

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + O\left(x^{n+1}\right)\,. \tag{13}$$

С помощью формулы Тейлора из дифференциального исчисления выводится следующая таблица асимптотических разложений:

$$\begin{array}{ll}
1. & e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots \\
2. & \sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \\
3. & \cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \\
4. & \ln(1+x) \approx x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + \cdots \\
5. & (1+x)^p \approx 1 + px + \dfrac{p(p-1)}{2!} x^2 + \dots + \dfrac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n + \cdots \\
6. & \dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n} + \cdots
\end{array} \tag{14}$$

Разложения (14) активно применяются при вычислении сложных пределов, когда не помогают ни элементарные преобразования, ни эквивалентные.

Пример 6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}\,.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\Big(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)\Big(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Big)-x-x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}\,.$$

Здесь мы использовали очевидные соотношения типа

$$\frac{x^2}{2}\cdot\left(-\frac{x^3}{6}\right) = -\frac{1}{12}x^5 = -\frac{1}{12}o(x^3) = o(x^3)\,;$$

$$o(x^2)\cdot o(x^3) = o(x^5) = o(x^3) \qquad \text{и т. п.}$$

Пример 8.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}-2\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-2\right) =$$

$$= x^2\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\,1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-2\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{1}{4}+\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{4}\,.$$

Здесь

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 0\,.$$

Пример 9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)^3+\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)^3}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{27x^3}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+O\left(x^4\right)-1+\frac{x^2}{2}}{x^3} =$$

$$= 27+\lim_{x\to 0}\frac{O\left(o(x^3)\right)}{x^3} = 27+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = 27$$

Здесь при разложении косинуса мы, в отличие от предыдущих примеров, воспользовались формулой (13), а не (12), поскольку в противном случае нам пришлось бы выписывать три члена разложения вместо двух, которых вполне достаточно. А вот при вычислении предела первого слагаемого мы вообще обошлись без разложений, применив нужную эквивалентность.

Пример 10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt{1-x^2}}{x^5}$$

Так как в знаменателе стоит x^5, то числитель следует раскладывать до $o(x^5)$.
Имеем:

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^5 x}{120}+o\left(\sin^5 x\right)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^5 x}{120}+o(x^5)\,.$$

Далее:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\,;$$
$$\sin^3 x=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^3=(x+\alpha(x))^3\ , \quad \text{где}\quad \alpha(x)=-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\,;$$
$$(x+\alpha(x))^3=x^3+3x^2\alpha(x)+3x\alpha^2(x)+\alpha^3(x)\,.$$

Но $\quad\alpha(x)=-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)\,.\quad$ Значит, $\quad 3x^2\alpha(x)=-\dfrac{x^5}{2}+o(x^5)\,.$

Тогда $\quad x\alpha^2(x)\sim x\cdot\dfrac{x^6}{36}=o(x^5)\,,\quad \alpha^3(x)\sim-\dfrac{x^9}{216}=o(x^5)\,.$

Следовательно,

$$\sin^3 x=x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^5)\,,$$
$$\sin^5 x=x^5+o(x^5)\,.$$

Итак,

$$\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{x^5}{2}\right)+o(x^5)+\frac{x^5}{120}+o(x^5)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5)\,.$$

Аналогично

$$x\sqrt[3]{1-x^2}=x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}}=x\left(1-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)\right)=x-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{9}x^5+o(x^5)\,.$$

Таким образом,

$$\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5) - x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{9}x^5 + o(x^5) = \frac{19}{90}x^5 + o(x^5)\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5} = \frac{19}{90} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^5)}{x^5} = \frac{19}{90}\,.$$

При вычислении пределов не стоит сразу хвататься за асимптотические разложения. Возможно, это будет «стрельба из пушки по воробьям». Надо посмотреть, а нельзя ли решить данную задачу с помощью эквивалентных или хотя бы упростить её? И только, когда мы увидим, что далее мы не можем продвинуться с помощью элементарных методов, прибегать к разложениям.

Список литературы

[1] Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва, 2003 г.

[2] И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Математический анализ в задачах и упражнениях, том 1. Москва, 2017 г.