П Р Е Д Е Л Ы

продолжение

$e = 2{,}7182818284\ldots$

Второй замечательный предел – новое число

Леонард Эйлер XVIII век

$$e \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (1)$$

т.к. любое $x \in \mathbb{R}_+$ лежит между двумя натуральными

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

замена: $t = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x}$$

Знаем, что $1^n = 1 \quad \forall n \Rightarrow 1^\infty = 1$, но

если рассматривать не "чистую" 1:

тогда $\left(1+б.м.\right)^{б.б.} \neq 1$

Самый простой тип связи между б.м. и б.б. используется в (1).

Посмотрим "в лоб": $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

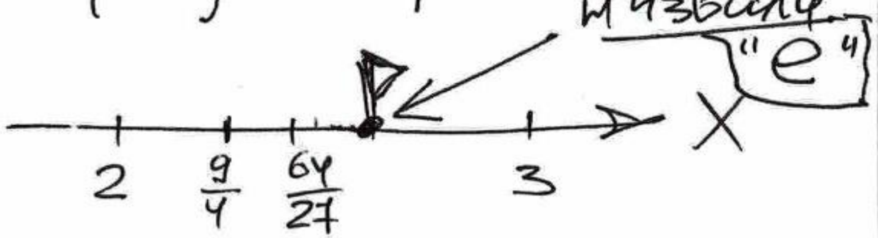
$a_1 = 2$ $\qquad a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$ $\quad \ldots$

1) можно доказать, что $\{a_n\}$ – возрастает

2) можно доказать, что $\{a_n\}$ – ограничена

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n$:



$\Rightarrow \left(1 + б.м.\right)^{Б.Б.} = e^k$, где

k надо найти!

Примеры: (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}} =$

$= [(\sim 1)^{\infty}]$

$(1+\text{б.м.})^{\text{б.б}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\cancel{+}-x+1}{x^2+x+1}+1-1\right)^{\frac{x^2}{1-x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}-1\right)^{\frac{x^2}{1-x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2x}{x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2x}{x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2+x+1}{-2x}}\right)^{\frac{-2x}{x^2+x+1}\cdot\frac{x^2}{1-x}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^3}{(x^2+x+1)(1-x)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^3}{-x^3}}$

$= e^2$ Ответ.

$a^{bc} = (a^b)^c$

$$\text{②}\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x\sqrt{x}}{1-x}} = \left[(1+\text{б. м.})^{\text{б.б.}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1+x}{2+x}-1\right)^{\frac{1-x\sqrt{x}}{1-x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-1}}\right)^{\frac{-1}{x+2}\cdot\frac{1-x\sqrt{x}}{1-x}}$$

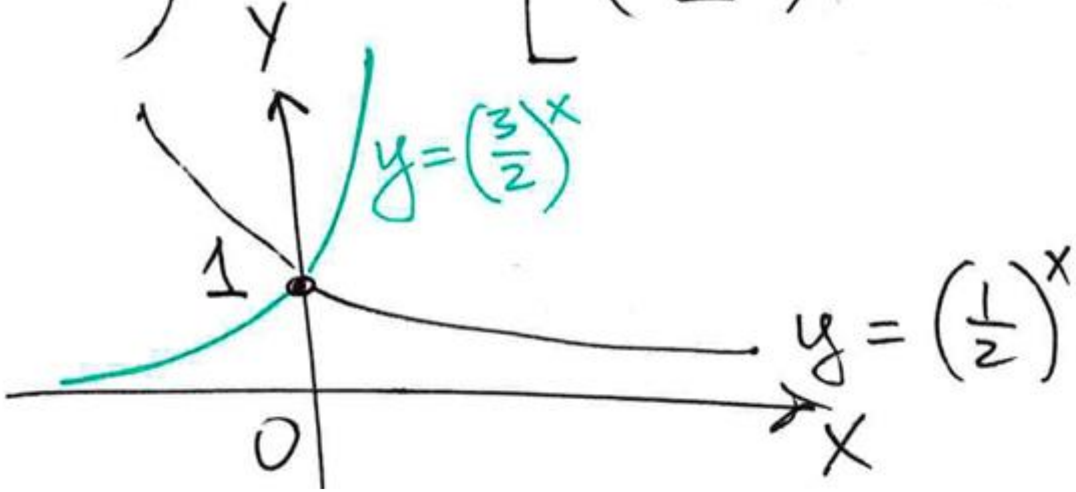
$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x\sqrt{x}}{(x+2)(x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x\sqrt{x}}{x^2}}$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{1/2}}} = e^{-0} = 1$$

Осторожно:

③ $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right] = +0$$

④ $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty}\right] = +0$$



⑤ $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=[(\sim 1)^{\infty}]=e^{k},$

$k=?$

$$\| $$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+(\sin x+\cos x-1)\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\left(\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin x-\dots}{x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-2\sin^2 x/2}{x}}\overset{(\star)}{=}e \quad \underline{\text{Ответ.}}$$

$$(\star)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-2\sin^2 x/2}{x}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{1}-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x/2}{x}=$$

$$=1-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x/2\cdot x/2}{x}=1$$

"Тяжелая артиллерия" —

Правило Лопиталя

Пусть надо найти $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ типов

$\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$. Оказывается,

можно сначала вычислить

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \overset{\text{обозн.}}{=} K$ и, если K $\exists$ и конечный, то

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = K}$$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a \qquad \left(e^x\right)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Для любых двух дифференцируемых функций на области определения верно:

1. $(c)' = 0$
2. $(u+v)' = u' + v'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

5. Производная сложной функции ***y =f(g(x))*** вычисляется в соответствии с формулой

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Примеры: 1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\overset{\text{п.л.}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{4x^3+2x^2-1}\overset{\text{п.л.}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-4}{12x^2+4x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(3x-2)}{4(3x^2+x)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{3x^2+x}=$

$\overset{\text{п.л.}}{=}\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{6x+1}\overset{\text{п.л.}}{=}\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{0}{6}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg} 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{5x} =$

$\overset{\text{п.л.}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}\cdot 2}{5} = \dfrac{2}{5}$ Ответ.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x} \overset{\text{п.л.}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}\cdot(-1)-2}{1-\cos x}$

$= \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{\text{п.л.}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x} \overset{\text{п.л.}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x} = 2$

ДОМА: 1. 1.320 – 1.323, 1.330, 1.333.

2. повторить таблицу производных и правила дифференцирования

3. стр. 220 5.329, 5.330, 5.334, — 5.343